

www.4772.org.com

Quiz 25%

206 200

HW 10%

Wain *

Mid 1 15%

Manson

Mid 2 15%

Cengel

Final 35%

206 200

مکانیک سیالات

علم مطالعه سیالات در حالات سکون } Fluid statics
و برپایی تأثیرات سیال روی حُرزها } Fluid dynamics
{ سطوح جامد
{ مرز مشترک سیال

تعریف سیال: ماده‌ای است که تحت تأثیر تنش برشی هر چند کوچک به طور پیوسته تغییر شکل دهد

آزمایش: ذره‌ای نزدیک صفحه بالا همراه صفحه حرکت می‌کند
هرچه از صفحه بالایی دور شویم مقدار حرکت کمتر می‌شود
برشی ایجاد می‌کند
 $t_3 > t_2 > t_1 > t_0$

* خط‌های جوهر به صورت خط راست هستند علتش توانایی بنا

x به ازای هر τ حتماً حرکت را داریم (تعریف سیال) میزان تغییر خط جوهر کم می‌شود

سیال ساکن: سیالی است که تنش برشی برابر صفر باشد (تنش هیدرواستاتیک)

Fluid ← با هر نیرویی حرکت می‌کند
elastic solid ← بعد از گذشت زمان τ از نیرویی بیشتر دچار تغییر می‌شود (پلاستیک)
rigid solid ← با هیچ τ تغییر نمی‌کند
بعد از اعمال نیرو و با گذشت زمان

- بر کاربردین از سیالات آب هوا روغن می‌باشند

- برخی از پلاستیک هم رفتار جامد را دارند

سیال می‌باشد: مایع: مولکول‌های نزدیک و فشرده ← نیروی چسبندگی قوی دارند
گاز: مولکول‌های دور و عدم فشرده ← نیروی چسبندگی قابل چشم‌پوشی

Basic Equation:

معادلات پیوستگی

علم جریان سیال شاخه‌ای از علم مکانیک است

1. Conservation of mass (continuity eq.)

2. Conservation of linear momentum (2th of Newton law)

3. Conservation of angular momentum

4. Conservation of Energy (1th law of thermodynamics)

5. 2th law of thermodynamics

توانایی بنا

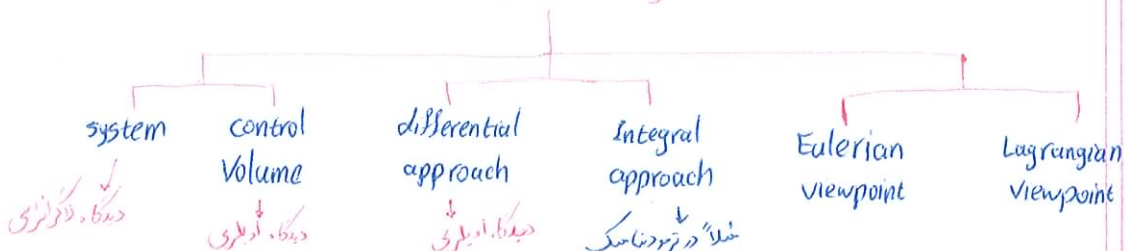
جرم

مومنتم

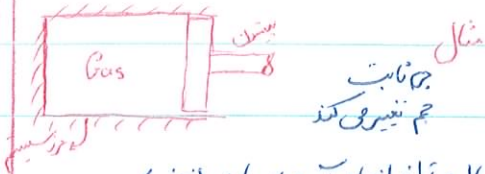
انرژی

در system تعریف می‌شوند

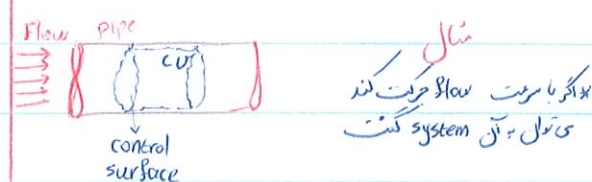
Method of Analysis



system عبارت است مقدار حجم مشخص ثابت .
 - مرزهای سیستم جداکننده سیستم از محیط است
 - مرزهای سیستم می تواند ثابت یا متحرک باشند
 * انتقال جرم از مرزهای سیستم امکان پذیر نیست (در حالت کار در انتقال حرارت)



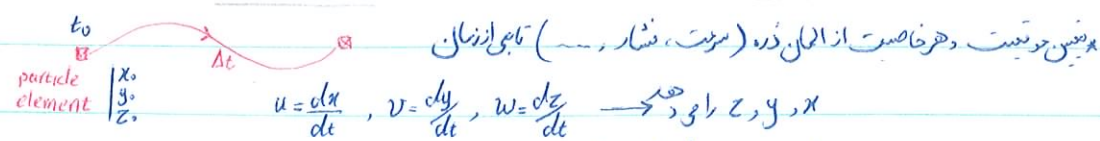
control volume (حجم کنترلی) (CV) عبارت است از هر حجم و جرمی از فضا که سیال می تواند از میان آن جریان یابد (فرضی)
 * اگر این فضا ثابت باشد ← system
 * در این مورد جرم می تواند وارد و خارج بشود ← سیستم را مرزی وارد و خارج می شود
 - مرزهای حجم کنترلی سطح کنترلی نامیده می شود * سطح کنترلی می تواند دائمی یا متحرک باشد



Differential Form: سیستم یا حجم کنترلی بسیار کوچک
 * به صورت معادلات دیفرانسیلی (ODE یا PDE)
 partial ← P
 ordinary ← O
 * رفتار نقطه به نقطه سیال بررسی می شود (اطلاعات جزئی نمی دهد)

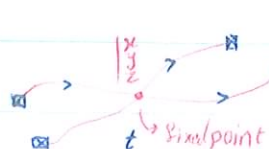
Integral Form

* رفتار نقطه به نقطه جریان سیال نیازی نیست (کل آن اهمیت دارد)
 * سیستم یا حجم کنترلی محدود (دایره، یا مثلث یا به صورت متوسط اندازه گیری می شود)
 * محاسبات تحلیلی ساده تر می باشد
 Lagrangian viewpoint: پی گیری هر المان دره (حجم کوچک از میدان سیال که به مقدار لازم هوکسل در آن باشد)
 * (در محیط continuum حجم در جرم به صورت سیل می کشد)



$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$$

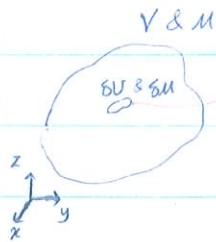
Eulerian viewpoint: توجه داشتن به خواص جریان در یک موقعیت مشخص در فضا تابعی از زمان
 * نقطه ثابتی که ذرات از آن عبور می کنند



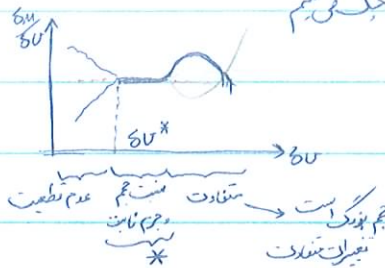
(چون محیط continuum است تمام ذره از آن در هر لحظه عبور می کنند)

* سرعت در این نقطه ← مربوط به ذرات عبوری است (خود نقطه ثابت است)

$$x(t), y(t), z(t) \text{ در اول: } x, y, z$$



عنصر حجمی
element of volume



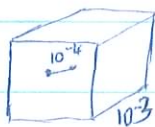
continuum assumption

حجم بزرگی را که دارای جرم است را که کوچک می کنیم

$$\Delta V^* = 10^{-9} \text{ mm}^3 \text{ برای هوا}$$

$$\rho = \text{density} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \text{چگالی}$$

برای هوا $\Delta V^* = 10^{-9} \text{ mm}^3 = (0.001)^3 \text{ mm}^3$ از شرایط استاندارد 20°C ، 1 atm حدود 3×10^8 مولکول



* مسیر پویایی آزاد مولکولی برای هوا $\lambda = 10^{-4} \text{ mm}$ (مسیر یا فاصله بین در مولکول هوا)

* اگر حجم هوا از 10^{-9} mm^3 کمتر شود $\leftarrow$ عدم قطعیت (مولکول، دارد و خارج می شود)

$\Delta V \rightarrow \Delta V^*$ محیط فیزیکی $\leftarrow$ ابعاد کمتر می شود

$\Delta V \rightarrow 0$ خطا می رود $\leftarrow$ مولکول کافی داشته باشیم

* در نظر گرفتن سیال به عنوان محیط فیزیکی $(\Delta V \rightarrow 0)$

- اتمان در سیال جرم کوچکی از سیال به حجم ΔV^* (particle fluid)

- مسیر پویایی آزادی در محیط continuum نیز صریح است (به صریح می کند)

Continuum

density: $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ واحد kg/m^3 یا slug/ft^3 (در میکرو سیال پیوسته)

* $\rho = \rho(x, y, z, t)$ scalar field (اسکالاری) $\leftarrow$ تابع زمان $\leftarrow$ تابع مکان

specific volume: $\bar{v} = \frac{1}{\rho}$ واحد $\left[\frac{\text{L}^3}{\text{M}} \right]$ (جم مخصوص)

specific weight: $\gamma = \rho g$ واحد $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ or $\frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^3}$ $\left[\frac{\text{F}}{\text{L}^3} \right]$ (جم مخصوص)

specific gravity: $\text{S.G.} = \frac{\gamma_{\text{fluid}}}{\gamma_{\text{water}}} = \frac{\rho_{\text{fluid}}}{\rho_{\text{water}}}$ نسبت با آب می سنجند (در دسترس تر است)

جاذبه مخصوص $\text{S.G.}|_{\text{air}} = ?$ $(g = 9.807 \text{ m/sec}^2 = 32.174 \text{ ft/sec}^2)$

$$\gamma_{\text{air}} = \rho_{\text{air}} g = (1.204 \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/sec}^2) = 11.8 \text{ N/m}^3 = 0.0752 \text{ lb}_f/\text{ft}^3$$

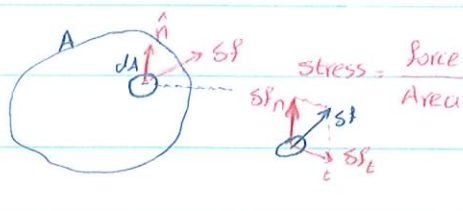
$$\gamma_{\text{water}} = \rho_{\text{water}} g = (998 \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/sec}^2) = 9790 \text{ N/m}^3 = 62.4 \text{ lb}_f/\text{ft}^3$$

$$\text{S.G.}|_{\text{air}} = \frac{\gamma_{\text{air}}}{\gamma_{\text{water}}} = \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{water}}} = 0.00121$$

Stress & Pressure:

دفعہ نبرد ← ۱) body force (نیروی جسمانی) : یہ تمام افراط جسم وارد ہونے والی قوتوں کو کہتے ہیں، الیکٹرک، مغناطیسی

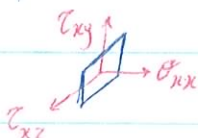
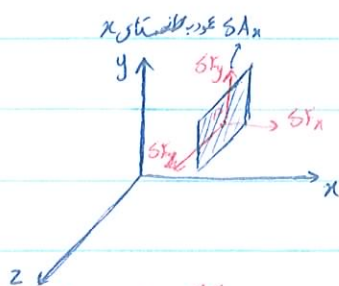
12 surface force (نیروی سطحی)



$$\sigma_n = \frac{\delta F_n}{\delta A_n} \quad \begin{array}{l} \text{normal} \\ \text{stress} \end{array}$$

$$\tau_n = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta f_t}{\Delta A_n} \quad \begin{array}{l} \text{shear} \\ \text{stress} \end{array}$$

stress $\equiv$ second-order tensor* (تانسور مرتبه دوم)



۲: حق انتخاب داریم > صفت

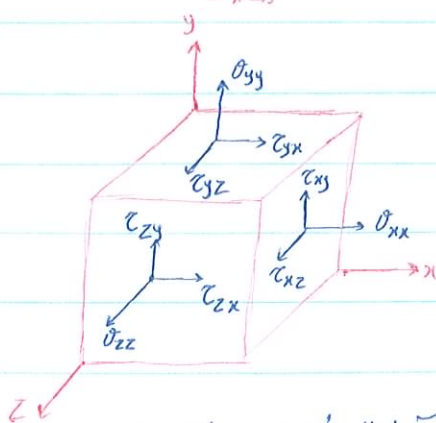
(اسکاڑے مرتبہ ۵ بردار ۱ مرتبہ ۱)

normal $\checkmark$ $\rho_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta x}$

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \quad \text{shear}$$

$$\tau_{\text{rel}} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta F_1}{\Delta A_1}$$

700 (مکملہ)



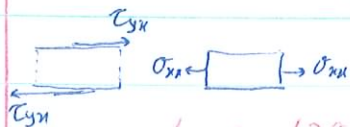
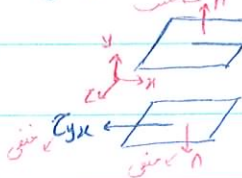
$$2^{\text{nd}} \text{ order } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{N/m}^2 \\ \text{or} \\ \text{lb/ft}^2 \end{matrix}$$

$$6 \text{ حؤلفه} + 3 \text{ حؤلفه} = 9 \text{ حؤلفه}$$

۲۰۰ → جهت اجمال
 ← صفای
 یزید آن صفای علی بن ابی طالب (عقود مجرب)

* علامت تنفس: هر حمله تنفس + است اگر جهت تنفس در صافه ای که نیرب آن اعلای شود هر در + یا هر در -

$$\int_{\Omega} \tau_{yx} = 5 \frac{N}{m^3}$$



* کتاب درسی های ۸

$$\left. \frac{dm}{\rho dV} \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial b_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV \right\} \text{Newton's 2nd}$$

Pressure : $\sigma_{ii} = -P + \bar{\sigma}_{ii}$ (نشانه عکس است)

داده $\frac{N}{m^2}$ $\frac{lb_f}{ft^2}$

تاسورشی برای حال ساکن $= \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$

$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ velocity field

* بیانگر دیدگاه ادیتری است (مختصات زمان مستقل است)

$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$

* سرعت $\vec{V}$ در حقیقت P و در هر نقطه سرعت ذره سیال عبوری از آن نقطه و در آن لحظه

Steady flow (جریان دائم یا ثابت) اگر $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (any fluid property such as ρ, u, p) جریان پایا است

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$
 $\rho(x, y, z)$ $\vec{V}(x, y, z)$

* در زمانی سیال عبوری از $\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}, \frac{z}{z_0}$ سرعت یکسان دارد

$\rho_1(x_1, y_1, z_1)$
 $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1)$

$\rho_2(x_2, y_2, z_2)$
 $\vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$

سرعت در هر نقطه یکسان - از نقطه 1 به 2 تغییر میکند (نسبت مکان)

$\begin{cases} \rho_1 \neq \rho_2 \\ \vec{V}_1 \neq \vec{V}_2 \end{cases}$

تعداد مختصات مکانی مورد نیاز برای تعیین میدان سرعت معروف به بعد جریان one, two, three, dimensional flows

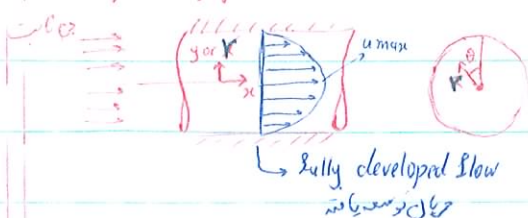
$v = \vec{V}(x)$ one dimensional also $v(x, t)$

$\vec{v} = \vec{V}(x, y)$ 2 dimensional also $v(x, y, t)$

$\vec{v} = \vec{V}(x, y, z)$ 3 dimensional also $v(x, y, z, t)$

* زمان به عنوان بعد میدان محسوب نمی شود

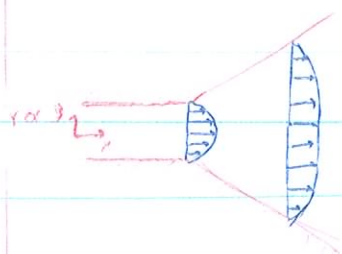
* Example : pipe flow



$u_r = u_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$

* در دهانه به دیواره ای چسبیده
 * برای جریان دائم است
 * جریان در pipe دارای تقارن symmetry است

* Example : channel flow

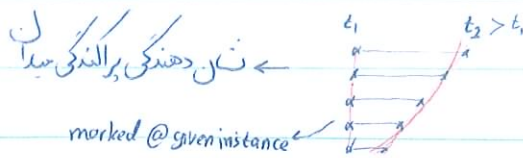


* سرعت در دیواره صفر u_{max} کاهش می یابد

* در این جا $u(x, y)$ 2 بعدی

* جریان steady است

Flow visualization

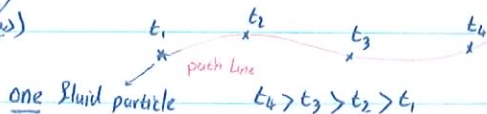


Timeline 11 (خط زمان)

مکان هندسی ذرات مجاور هم

موقعیت اولیه در زمان

(دیدگاه لاکر انترنی)



path line (2) (خط مسیر)

معرف مسیر حرکت یک ذره خاص با گذشت زمان

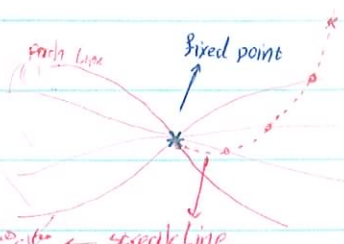
* اگر میدان سرعت معلوم باشد شکل آن گیری موقعیت و مسیر ذره را بدست می آوریم

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

خط مسیر

میدان سرعت

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dz}{dt} = w \end{cases}$$



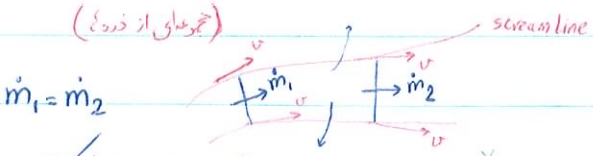
streak line (3) (خط اثر) یا (خط رد)

معرف مکان هندسی موقعیت ذراتی که از یک نقطه ثابت

از زمان مشخصی تا به حال عبور کرده اند (شیرین)

مکان هندسی نقاط معینال دارای یک نقطه ثابت عبور کرده اند (تابشی از زمان است)

(خروجی از ذره)



streamline (4) (خط جریان)

مکان هندسی نقاطی که میدان سرعت بر آن عمود است

همین در خط ثابت است

* معروف مکان هندسی نقاطی از میدان دگر خط عمود بر این نقاط هم جهت با بردار سرعت است

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\text{streamline}} = \frac{v}{u}$$

در کمک v ، جریان پیدایش شود

$$\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} = \omega x\hat{i} - \omega y\hat{j}$$

دام ← (زمان ندارد) ادیلری ← (زمان ندارد) 2D است

(a) محاسبه خط جریان عبوری از نقطه $(2, 5, 0) = (x_0, y_0, z_0)$

(b) محاسبه سرعت ذره در موقعیت $(2, 5, 0)$

(c) تعیین موقعیت ذره در $t = 20$ با شرایط $t = 0 @ (x_0, y_0, z_0)$

(d) محاسبه سرعت ذره در $t = 20$ $(V_m = ?)$

(e) $path\ line = stream\ line$ ؟

$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$: خط جریان، میدان سرعت
 $\frac{dy}{dt} = u, \frac{dx}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w$: خط مسیر، میدان سرعت
 (خط جریان، یک خط مسیر : اگر آن خط حرکت می کنیم) (مستوی و مانند)

a) خط جریان، جی نهایت particle دارد سرعت حرکت عمادی بر خط جریان است

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{streamline}} = \frac{u}{v} = \frac{-\alpha y}{+\alpha x} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \ln y = -\ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow xy = C = 2 \cdot 8 = 16$$

streamline عبوری از $(2, 8, 0)$ ، $xy = 16$

b) $\vec{v} = \alpha x \hat{i} - \alpha y \hat{j} \Rightarrow \vec{v} = 2\alpha \hat{i} - 8\alpha \hat{j}$

c) باید pathline را بیابیم

$$\begin{cases} u_{\text{particle}} = \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{dt} = \alpha x \xrightarrow{\text{استقلال}} \ln \frac{x}{x_0} = \alpha t & x = x_0 e^{\alpha t} \\ v_{\text{particle}} = \frac{dy}{dt} & \frac{dy}{dt} = -\alpha y \xrightarrow{\text{استقلال}} \ln \frac{y}{y_0} = -\alpha t & y = y_0 e^{-\alpha t} \end{cases}$$

دیکه لاگرانژی (موقعیت اولیه و زمان) جواب :

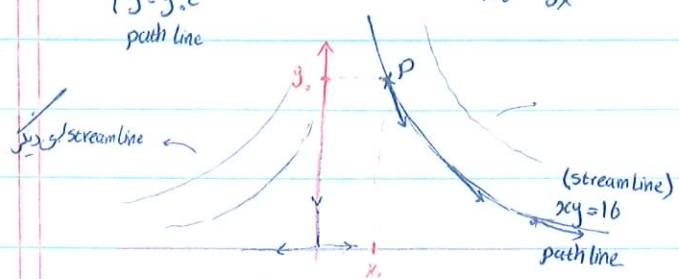
$$\begin{cases} x = 2e^{20\alpha} \\ y = 8e^{-20\alpha} \end{cases}$$

d) $\vec{v} = \alpha x \hat{i} - \alpha y \hat{j} = 2\alpha e^{20\alpha} \hat{i} - 8\alpha e^{-20\alpha} \hat{j}$ در قسمت قبل را در معادله قرار می دهیم

دیکه لاگرانژی برای همان مستقل از (x, y) تغییر می کند

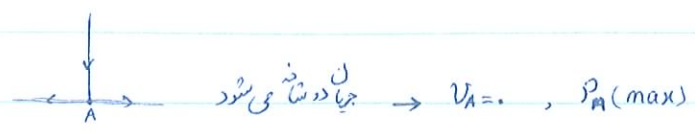
e) $\begin{cases} x = x_0 e^{\alpha t} \\ y = y_0 e^{-\alpha t} \end{cases} \xrightarrow{\text{راحت}} e^{-\alpha t} = \frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{y} \Rightarrow xy = x_0 y_0 = 16$

streamline



نقطه P هم روی همان streamline حرکت می کند
 در زمان مختلف روی بردارهای سرعت میدان می افتد
 x دیان جا streamline همان streamline هستند

* در جریان ای پایا (Steady) خط جریان = خط مسیر زده = خط اثر (در هم منطبق)



Eulerian vs. Lagrangian

دیکه لاگرانژی : میدان سرعت برای نقطه ثابت در فضا $\vec{v}(x, t)$ و با گذشت زمان بیان می شود

* مکان و زمان مستقل هستند $v(x, y, z, t)$

x در دیکه لاگرانژی اگر بتوان x را از معادلات x, y حذف کرد به جریان دائم

دیکه لاگرانژی : مشخصات میدان برای یک ایتمان زده مشخص و با گذشت زمان بیان شده به طوری که سرعت آن در

$\vec{v}(\vec{r}_0, t)$ و $\vec{r}_0$ بین موقعیت ذره در $t=0$ است

لاگرانژی از خط میر (لاگرانژی) مشتق اولی (پیدا کنیم)
 به ایند $\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - V(x,y)$
 به ایند $\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - V(x,y)$

لاگرانژی مستقل عبارت است از: (1) موقعیت اولی r (2) زمان t

مثال حل شده: $\vec{v}_E = (a_x, -a_y, 0)$ $\vec{v}_{lag} = (a_x e^{at}, -a_y e^{-at}, 0)$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (بین استفاده از اولی)

در دیدگاه لاگرانژی شتاب از طریق مشتق $\vec{v}$ بدست می آید ولی در اولی خیر

Material Derivative (مشتق مادی)

φ معرف هر خاصیت سیال

در دیدگاه اولی $\varphi = \varphi(t, \vec{r}) = \varphi(t, x, y, z)$

تعبیر φ به $\varphi + d\varphi$ در بازه زمانی dt برای یک ذره در حال حرکت

$\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi$

(نقطه مشتق نیست) دیدگاه لاگرانژی

اگر $\varphi(x, y, z, t)$ وابسته به t باشد $\varphi(t)$ می شود لاگرانژی

$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

مولد ای خاصی عبوری از $P(x, y, z)$ در زمان $t \rightarrow \frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w$

$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \varphi$

local convective

$\left(\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \rightarrow u \frac{d}{dx} + v \frac{d}{dy} + w \frac{d}{dz}$ مشتق مادی: اسکالر

Acceleration: $\vec{A} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ شتاب در دیدگاه اولی شتاب در دیدگاه لاگرانژی

مثال حل شده

$\vec{A}_{lag} = \frac{d\vec{v}_{lag}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (a^2 x e^{at}, a^2 y e^{-at}, 0) = a^2(x, y, 0) = a^2 \vec{r}$

$\vec{A}_E = \frac{\partial \vec{v}_E}{\partial t} + (\vec{v}_E \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_E = 0 + (a_x, -a_y, 0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}_E$
 $= (a_x \frac{\partial}{\partial x} - a_y \frac{\partial}{\partial y} + 0) (a_x, -a_y, 0) = a_x(a, 0, 0) - a_y(0, -a, 0) = (a^2 x, a^2 y, 0) = a^2 \vec{r}$

شرط عدم لغزش و عدم برش دما:

* تعادل حوضی: سطح جاذب و موکول ای سیال هم سطح آن برقرار باشد

(در صورت دیوار و برش موکول ای جدار یکسان است) ← وجود اصطکاک (لزجت)

* تعادل حرارتی: موکول ای سیال و دیوار هم دما هستند

شرایط مرزی برای تحلیل جریان سیالات محیط بیگانه: $T_{\text{دیوار}} = T_{\text{سیال}}$

$\vec{V}_{\text{دیوار}} = \vec{V}_{\text{سیال}}$

شرط عدم لغزش برش

شرط عدم برش دما

no slip boundary condition

لزجت (Viscosity)

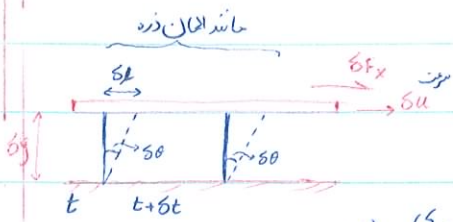
خاصیتی از سیال که تنش برشی اعمال شده را به نرخ کرنش برشی یا تغییر شکل زادی مرتبط می کند

- سیالی از مقاومت سیال به نیروی برشی اعمال شده

- به ازای تنش برشی مشخص: سیال با نرخ تغییر شکل زادی بیشتر ← لزجت کمتر
سیال با نرخ تغییر شکل زادی کمتر ← لزجت بیشتر

آب (رابطه عکس)
↓
نرخ
↑
نرخ

Newton's Law of Viscosity



$$\tau_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y}$$

$$\text{نرخ تغییر شکل زادی (دما)} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\delta l = \delta \theta \times \delta y = \delta u \delta t \Rightarrow \delta \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy}$$

for Newtonian fluids:

$$\tau_{yx} \sim \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{تنش برشی متناسب با نرخ تغییر شکل زادی})$$

$$\tau_{yx} \sim \frac{du}{dy} \quad \text{رابطه خطی}$$

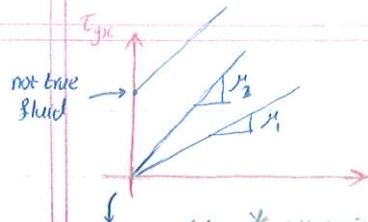
* ضریب تناسب هال و سیگورته می باشد

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\theta}{dt} = \mu \frac{du}{dy}$$

Dynamic Viscosity ضریب تناسب

↓ ثابت
↑ تغییر کند کمالات

* به ازای تنش برشی مشخص: اگر $\frac{du}{dy}$ آنگاه μ ↑
اگر $\frac{du}{dy}$ آنگاه μ ↓



سیالات نیوتنی: milk, gases, oil, water, honey

سیال غیر نیوتنی: خن، بعضی پلیمرها

تغییر شکل دائم
تنش برشی صفر به نرخ تغییر شکل زارایی صفر

یکای μ $\Rightarrow \left[\frac{FL}{L^2} \right]$

$$\tau \left[\frac{F}{L^2} \right], \frac{du}{dy} \left[\frac{1}{L} \right] \Rightarrow \mu \left[\frac{FL}{L^2} \right]$$

SI: $\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{s}{m} = \frac{kg}{m \cdot s}$, Pa.s

(1 poise = $\frac{1}{10}$ Pa.s)

BG: $\frac{lb \cdot s}{ft^2}$

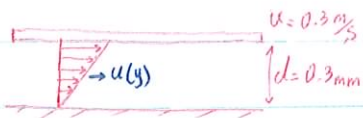
$\mu_{water} = 1.0 \times 10^{-3}$ Pa.s $\mu_{air} = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa.s شرایط استاندارد

Kinematic viscosity: ν (نسبت سینماتیک)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\left[\frac{N \cdot s}{m^2} \right]}{\left[\frac{kg}{m^3} \right]} = \left[\frac{m^2}{s} \right] \sim \left[\frac{L^2}{T} \right]$$

$\nu_{water} = 1.0 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ $\nu = 1.51 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

(نسبت آب بیشتر اما نسبت سینماتیک هوا بیشتر)



مثال: با فرض پروفیل خطی برای سیال جابجین دو صفحه موازی بی نهایت

$SG = 0.88$ $\mu = 0.65 \times 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$

مطابق است (1) ν ($\frac{m^2}{s}$) (2) τ روی صفحه یا بین دیالای (Pa) (3) جهت تنش

(1)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{SG \times \rho_{water}} = \frac{0.65 \times 10^{-3}}{0.88 \times 10^3} = 7.39 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$$

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$ خطی: $\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{top} - u_{bottom}}{\Delta y} = \frac{u}{\Delta y}$ (2)

$\tau = 0.65 \times 10^{-3} \times \frac{0.3}{0.3 \times 10^{-3}} = 0.65 \text{ Pa}$ $\rightarrow$ τ برای هر لایه از سیال می باشد

* اگر پروفیل خطی باشد $\frac{du}{dy} \rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta y}$

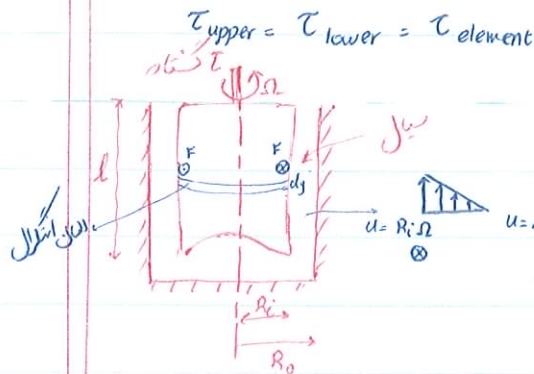
(3) همه این تنش ها یکایک برابر هستند

برای برابری تنش ثابت است $\Rightarrow$

برشی زاویه ای ایجاد می کند $\Rightarrow$

اگر دیواره را حرکت می کند $\Rightarrow$

انسان سیال (خطی است)



$$\Rightarrow T = \frac{2\pi R_i^3 \Omega l}{R_o - R_i}$$

$$\mu = \left(\frac{R_o - R_i}{2\pi R_i^3 \Omega l} \right) T$$

ولسکو متر استاندارد برای جریان

x گشتاد به کمک قدرت دهنده دست می آید

$R_o - R_i$ باید کوچک باشد تا بر ویل خطی شود

$$T = \int r dF = \int R_i \tau dA$$

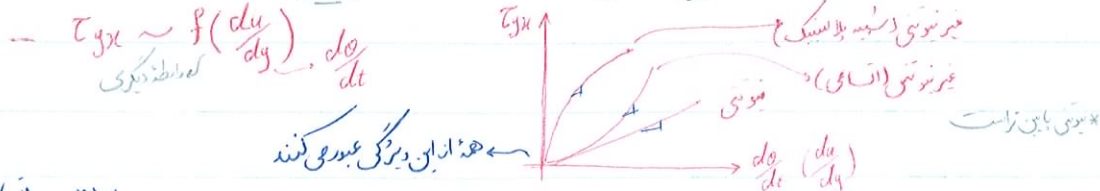
$$= \int_0^l R_i \mu \frac{du}{dr} \cdot 2\pi R_i dy$$

$$= \int_0^l 2\pi R_i^2 \mu \int_{R_o}^{R_i} \frac{R_i R_o - R_i^2}{R_o - R_i} dy$$

$\frac{dy}{dr} = \frac{\Delta u}{\Delta r}$

Non-Newtonian Fluid

در سیالات غیر نیوتنی تنش برشی و نرخ تغییر شکل از رابطه خطی نیوتنی پیروی نمی کند



$$\tau_{yx} \sim f\left(\frac{du}{dy}\right) \cdot \frac{d\tau}{dt}$$

همه از این ویژگی پیروی می کنند

$n > 1$ → اتسای
 $n < 1$ → شبه پلاستیک
 $n = 1$ → نیوتنی

$$\tau_{yx} = K_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

$$= K_1 \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \frac{du}{dy}$$

$\mu_a \rightarrow$ Apparent Viscosity $\rightarrow$ در غودار بالا = سبب در نقطه *

n, K_1 وابسته از ساختار ذرات ماده (تابعی از دما و حرارت و فشار)

هرچه تنش بیشتر نرخ کرنش افزایش می یابد $\rightarrow$ pseudo plastic $\rightarrow$ شبه پلاستیک $\rightarrow n < 1$: در غودار

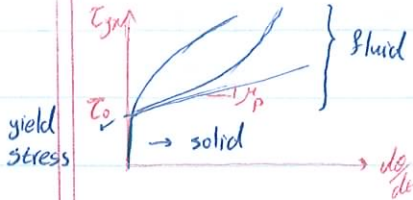
بعضی مواد نظیر محلول های پلیمری ، خمیر کاغذ و آب

مانند آب هوا روغن ، عسل ، شیر $\rightarrow K_1 = \mu \rightarrow n = 1$ نیوتنی

Quick Sand (خلل ای شنی) یا dilatant $\rightarrow n > 1$

در حالت کلی μ سیالات غیر نیوتنی بیشتر از μ سیالات نیوتنی است

مقدار کرنش ~ تنش برشی
(نه نرخ کرنش)



Elastic Solid

تنش به هم در آن لحظه کرنش می بینیم

Ideal Bingham plastic

(ساین جاده دمایع)

تنش عمود در نرخ کرنش صفر

$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu_p \frac{d\gamma}{dt}$$

مانند چسب، رنگ، گل خدای، غیر دینیل

تغییرات لزجت

* وابستگی کم به فشار * وابستگی زیاد به دما

liquids

کاهش نیروی بین مولکولی در اثر افزایش دما (کاهش مقاومت لایه های مولکولی)

$\tau \uparrow \rightarrow \mu \downarrow$ (استفادت)

gases

کاهش چگالی (در اثر افزایش دما در فشار ثابت) - کاهش نیروی بین مولکولی (در نتیجه) - ناچیز
افزایش انرژی جنبشی مولکولی و برخورد ذرات (collision) (در اثر افزایش دما) - اصلی

$\tau \uparrow \rightarrow \mu \uparrow$

متوسط پوشش آزاد مولکولی: λ سرعت متوسط: $\bar{c}$ تعداد مولکول: n
(در دما گاز در واحد حجم) $(\mu - n \bar{c} \lambda)$

* λ, n نسبت مستقیم و معکوس با فشار دارند

$\tau \uparrow \rightarrow \bar{c} \uparrow \rightarrow \mu \uparrow$

برای گازها

Power law

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n$$

$n_{air} = 0.7$

$1.716 \times 10^{-5} \frac{N \cdot sec}{m^2}$ (برای هوا)

Sutherland Eq.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

(air)

برای دمای مشخص

$T_0 = 273 K$ دمای استاندارد

$S = 110 K$ برای هوا

* فرمول اولی در دمای پایین / فرمول دوم برای دمای بالا

$$\mu = ae^{-bT}$$

$$\ln \mu = a + b\left(\frac{T_0}{T}\right) + c\left(\frac{T_0}{T}\right)^2$$

for water $\rightarrow \mu_0 = 0.001743 \text{ kg/m.s}$

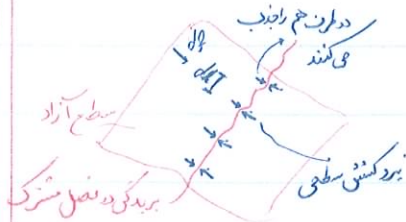
$$T_0 = 273 \text{ K}$$

برای مایعات:

$$\begin{cases} a = -1.94 \\ b = -4.8 \\ c = 6.74 \end{cases}$$

surface Tension (کشش سطحی)

عدم انبساط مایع به دلیل نزدیکی مولکولها $\rightarrow$ تشکیل سطح آزاد مایع با گاز (محاور)



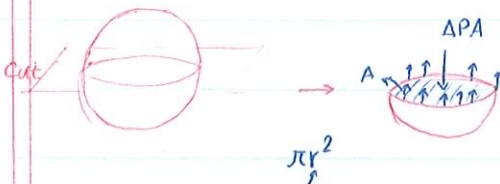
$$\gamma = \frac{dF}{dl} \quad \left[\frac{F}{L} \right]$$

$$dF = \gamma dl \rightarrow \text{نی تان نیرو را یافت}$$

$$\gamma = \begin{cases} 0.005 \frac{\text{kg}}{\text{m.s}} = 0.073 \frac{\text{N}}{\text{m}} & \text{آب - هوا} \\ 0.03 \frac{\text{kg}}{\text{m.s}} = 0.48 \frac{\text{N}}{\text{m}} & \text{جیوه - هوا} \end{cases}$$

* اگر بین مایع مایع باشد $\rightarrow$ مقدار کمتری شود

* وجود انحناء در سطح مشترک معروف افزایش فشار داخل قطرات است
گروی یون (قطر، حباب) $\Delta P = P_{\text{داخل}} - P_{\text{بیرون}}$



* از نیروی وزن صرف نظر کرده ایم $\Delta P A = 2\pi r \gamma \Rightarrow \Delta P = \frac{2\gamma}{R}$

برای حباب

برای حباب $\Delta P A = 4\pi r \gamma \Rightarrow \Delta P = \frac{4\gamma}{R} = 2\Delta P$ (قطره)



* علت در حباب هوا در سطح آزاد داریم $\rightarrow$ دیواره‌ای حباب مانند چندلایه مولکول آب است

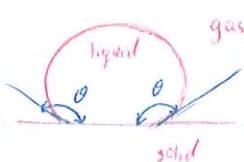
یک $2\pi r$ بیرونی، یک $2\pi r$ درونی است

* کشش سطحی برای وقتی است که در سیال مجاور هم باشند که اختلاف چگالی داشته باشند

اختلاف چگالی $\rightarrow \gamma$

contact Angle (زاویه تماس)

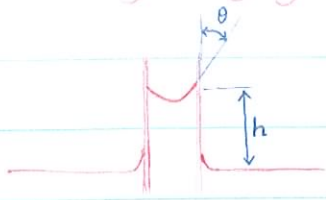
سطح مشترک مایع-گاز در تماس با سطح جامد



- 1) $\theta < 90^\circ \rightarrow$ سطح مشترک آب-هوا همیشه $\rightarrow$ مایع سطح جامد را تر می کند
- 2) $\theta > 90^\circ \rightarrow$ سطح مشترک جیوه-هوا همیشه $\rightarrow$ مایع سطح جامد را تر نمی کند

زاویه $\rightarrow$ خط / تماس سطح
که باید در آن سیال

مثال: محاسبه ارتفاع مایع در یک لوله استوانه‌ای شکل در حین کشش سطحی در آب غاص.



$mg = \rho V g = \pi R^2 h \gamma$ (وزن محصور)
 $\gamma = 2\pi R \gamma$ (کشش سطحی)

$\pi R^2 h \gamma = 2\pi R \gamma \cos \theta \Rightarrow h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\gamma R}$

* هرچه $R \downarrow$ و $h \uparrow$

$R = 1 \text{ mm}$ $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ $\theta = 0^\circ$

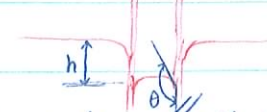
غاص آب - شیشه

$h = \frac{2(0.073) \cos 0}{1000 \times 0.001} = 1.5 \text{ cm}$

$R = 1 \text{ mm}$ $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$ $\gamma = 0.48 \text{ N/m}$ $\theta = 130^\circ$

غاص جیوه - شیشه

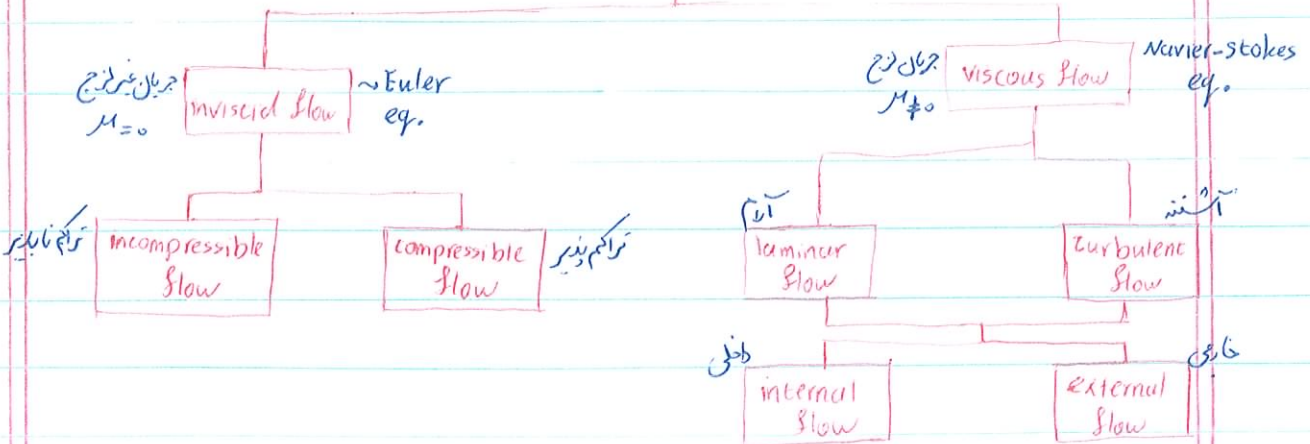
$h = \frac{2(0.48) \cos 130}{13600 \times (9.81) \times 0.001} = -0.46 \text{ cm}$



* برعکس می‌توان مقدار h را به کمک h نیز بدست آورد

: classification of fluid motions

Fluid Dynamics



* دسته‌بندی جامع، یکتا وجود ندارد

جرایم ای لزج:

$$\begin{cases} u|_{\text{tangent}} = u|_{\text{tangent}} \\ u|_{\text{normal}} = u|_{\text{normal}} \end{cases}$$

* در این مورد، دیواره‌ها می‌چسبند

* دیواره‌ها می‌چسبند - سرعت جریان در دیواره = 0

جریان ای غیر رنج

اصطلاح وجود ندارد

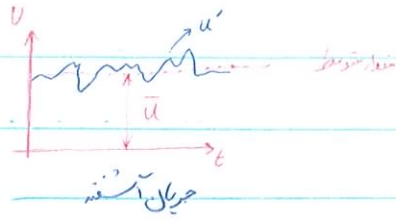
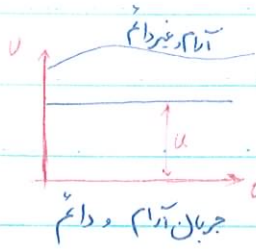
جریان ای آرام و آشفته

انرژی گیری بر حسب انرژی در یک حقیقت

و جریان آشفته هیچگاه دائم نمی ماند

جریان آرام دارای ساختار لایه ای و حرکت دائم

جریان آشفته دارای ساختار تصادفی و حرکت درهم



$$u = \bar{u} + u'$$

میانگین

$$Re = \frac{\rho u^2}{\mu}$$

inertial force
viscous force

$$= \frac{\rho u L}{\mu}$$

Reynolds Number (Re) عدد رینولدز

* برای جریان آرام عدد Re کمتر است، لزجت آن بیشتر *

و با افزایش عدد Re

$$Re \ll 1$$

→ اثرات لزجت زیاد

→ اثرات اینرسی کم

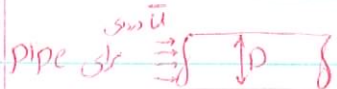
* جریان آرام *

$$Re \gg 1$$

→ اثرات اینرسی زیاد

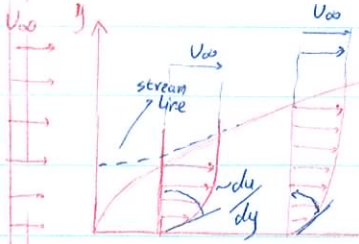
→ اثرات لزجت کم

یا اصطلاحاً جریان آشفته



$$Re_D = \frac{\rho U D}{\mu} > 2300 \rightarrow \text{Turbulent flow}$$

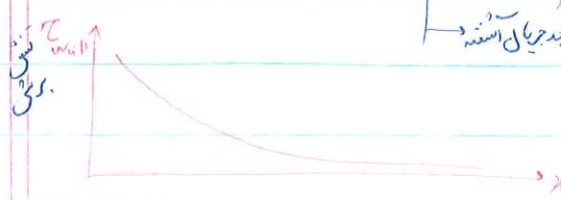
مثال



Flow over a flat plate

boundary layer edge
boundary layer

نامنظم بودن حرکت جریان
Free stream turbulence
نظمی سطح



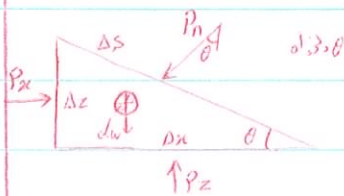
Fluid Statics

Shear stress $\xrightarrow{\tau_{xy} \neq 0}$ Shear deformation
 سیال دارای تغییر شکل

Shear stress $\xrightarrow{\tau_{xy} = 0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{fluid at rest} \\ \text{rigid body motion} \end{array} \right\}$ normal stress
 سیال بدون تغییر شکل

هدف: محاسبه توزیع فشار در سیال در دینامیک و استاتیک (توزیع شد در یک سیال ساکن یا متحرک بدون تغییر شکل)

قانون پاسکال: عدم وابستگی فشار یک نقطه خاص از سیال ساکن به جهت



$$dw = \gamma dv = \gamma g \frac{1}{2} b (\Delta x \Delta z)$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = 0$$

$$\sum F_x = 0 = P_x b \Delta z - P_n b \Delta s \sin \theta \Rightarrow P_x = P_n \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = P_z b \Delta x - P_n b \Delta s \cos \theta - \frac{1}{2} \gamma b \Delta x \Delta z \Rightarrow P_z = P_n + \frac{1}{2} \gamma \Delta z \quad (2)$$

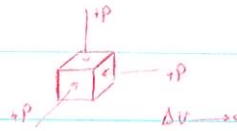
(1) در مایعات افقی فشار ثابت می ماند (خطوط هم تراز فشار)

(2) تغییر فشار در جهت عمودی متناسب با جرمایلی، جاذبه، تغییر ارتفاع (در سیال بر واحد سطح، چیزی تغییر نمی کند)

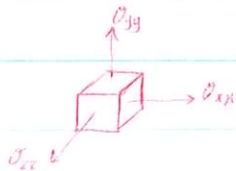
Pascal's Law: $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow P_x = P_n = P_z$ (بر روی هر واحد سطح در یک نقطه یکسان است)

P = فشار هیدرواستاتیک θ دما و انتخاب شد: مشتق بین فشار یک نقطه از سیال ساکن به جهت

Stress Tensor $\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$
 سیال بدون تغییر شکل



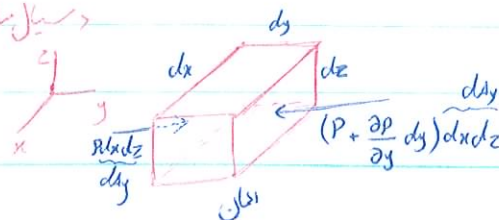
فشار برای سیال دارای تغییر شکل:



$$\bar{P} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad \text{Mechanical Pressure}$$

* اگر حجم اتمان ثابت باشد فشار مکانیکی با فشار هیدرواستاتیک برابری می کند

Fluid at Rest « سیال ساکن »



سطحی
 $\Sigma \vec{F}_s + \Sigma \vec{F}_{surface} = 0 = m\vec{a}$

$$\Sigma \vec{F}_{surface} = \left[p - \left(\rho \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz \vec{i} + \left[p - \left(\rho \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \right] dx dz \vec{j} + \left[p - \left(\rho \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \right] dx dy \vec{k}$$

$$\Sigma \vec{F}_b = \gamma dV = \int \rho \vec{g} dx dy dz$$

body force
per unit volume

body force
per unit mass

$$d\vec{F}_s + d\vec{F}_b = 0 \Rightarrow - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right\} dx dy dz + \rho \vec{g} dx dy dz = 0$$

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = 0 \quad (\text{برای انتخاب } = \rho \vec{a})$$

$$\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$$

اهمیت گریبان فشار و در مقدار آن (در برخی حالات حتماً فشار اهمیت دارد مانند پدیده کائیتاسیون)



پدیده کائیتاسیون معروف ایجاد حباب در سیال ناشی از کاهش فشار جامع تا فشار بخار اشباع

$$C_a = \frac{P_a - P_v}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

cavitation number

$$x\text{-direction} : -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0$$

$$y\text{-direction} : -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0$$

$$z\text{-direction} : -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0$$

با انتخاب مناسب محورهای مختصات مثلاً:

$$g_x = 0$$

$$g_y = 0$$

$$g_z = -g$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = -\rho g = -\gamma$$

$$p = p(x)$$

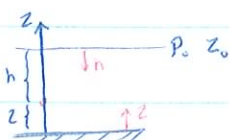
$$p = p(y)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad \text{فشار فقط تابع } z \text{ است}$$

که فرضیات رابط: (۱) سیال ساکن (۲) نیروی حجمی فقط نیروی ثقل و محور z راست‌دست باشد

برای سیال تراکم‌ناپذیر $\rho = \text{const}$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{const} \quad \int_p^P dp = \int_{z_0}^z -\rho g dz \rightarrow P - P_0 = -\rho g (z - z_0) = \rho g (z_0 - z)$$



$$z_0 - z = h$$

$$dz = -dh$$

$$\rightarrow P = P_0 + \rho g h$$

حرکت در یک نوع سیال در نقطه از مسیر پیوسته دارای ارتفاع یکسان باشد آنگاه فشار آن در نقطه نیز یکسان خواهد بود.
 متناسب با پایین رفتن در سیال فشار آنرا بیشتر خواهد یافت (رابطه خطی)

مثال: محاسبه اختلاف فشار $(P_B - P_A)$ بر حسب $\frac{\text{lb}_f}{\text{in}^2}$ (psi)

داده ها: $d_5 = 8''$, $d_4 = 5''$, $d_3 = 4''$, $d_2 = 3''$, $d_1 = 10''$, $\gamma_{\text{water}} = 62.4 \frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^3}$

محاسبات:

$$\begin{aligned} P_C - P_A &= \gamma_{\text{water}} \times d_1 \\ P_D - P_C &= (-) \gamma_{\text{Hg}} d_2 \\ P_E - P_D &= (+) \gamma_{\text{oil}} d_3 \\ P_F - P_E &= (-) \gamma_{\text{Hg}} d_4 \\ P_B - P_F &= (-) \gamma_{\text{water}} d_5 \end{aligned}$$

جمع بلا تراست: $P_B < P_F$ چپ

نتیجه: $P_B - P_A = 103.6 \gamma_{\text{water}} = 3.74 \frac{\text{lb}_f}{\text{in}^2}$

رابطه کلی: $P_A + \gamma_w d_1 - \gamma_m d_2 + \gamma_o d_3 - \gamma_m d_4 - \gamma_w d_5 = P_B$

Absolute & Gauge Pressure



بصورت ترازبی:

فشار abs = فشار gage + فشار اتمسفر
 اندازه گیری توسط بارومتر

$1 \text{ atm} = 101325 \text{ pa}$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ pa}$ $1 \text{ atm} = 1.01 \text{ bar}$

$1 \text{ psi} = 1 \frac{\text{lb}_f}{\text{in}^2} = 6895 \text{ pa}$

Barometer



$T = 20^\circ$
 $P_{\text{atm}} = 0.16 \text{ atm}$ (فشار بخار)

از لوله ای جویین استفاده می شود در ابتدا کامل خلا است

«د بالایی لوله فشار 0.16 اتمسفری باشد (تقریباً برابر صفر در نظر می گیریم)

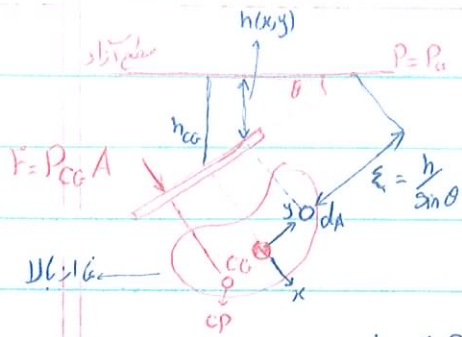
$P_2 = P_1 + \gamma_m h \Rightarrow P_a = \gamma_m h$

$h = \frac{P_{\text{atm}}}{\gamma_m} = \frac{101325}{13.6 \times 9810} = 761 \text{ mm}$

«عدد بالا برای آب 34 فوت می شود ← از جیوه بهره می برند

Hydrostatic force on submerged surface (نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح غوطه ور)

بصورت زیر است:



* اینها را هم می تونی ضرایب تابعی از مرکز جرم بدی
* ضرایب نیروی وارد بر سطح

$$dA = dx dy$$

$$dF = P dA = (P_a + h \gamma) dA$$

$$F = \iint P dA = P_a A + \gamma \iint h dA$$

$$h = \xi \sin \theta, \quad \xi_{cg} = \frac{1}{A} \iint \xi dA \rightarrow \text{فاصله مرکز ثقل تا مرکز هندسی}$$

$$\Rightarrow F = P_a A + \gamma \sin \theta \iint \xi dA = P_a A + (\gamma \sin \theta) A \xi_{cg} \quad \xi_{cg} \sin \theta = h_{cg}$$

$$F = P_a A + \gamma h_{cg} A = A (P_a + \gamma h_{cg}) = P_{cg} A \quad \text{مستقل از شکل و } \theta$$

مقدار نیروی فشاری وارد بر سطح جسم غوطه ور برابر فشار در مرکز ثقل $\times$ سطح جسم

* محاسبه محل اثر نیرو (x_{cp}, y_{cp})

$$y_{cp} F = \iint y dF = \iint y P dA = \iint y (P_a + \gamma h) dA$$

$$= \iint y (P_a + \gamma \xi \sin \theta) dA$$

مانند این اگر نیرو ثابت گسترده
حل مرکز ثقل ندارد
(خود را می خصصت در مرکز ثقل است)

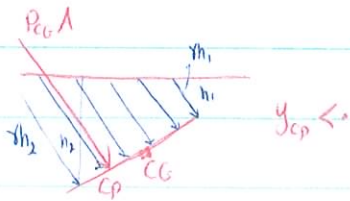
$$= \iint y \gamma \xi \sin \theta dA$$

$$= \gamma \sin \theta \iint y \xi dA \quad \xi = \xi_{cg} - y \rightarrow \gamma \sin \theta \iint y (\xi_{cg} - y) dA$$

$$\iint y \xi_{cg} dA = 0 \rightarrow -\gamma \sin \theta \iint y^2 dA$$

$$\Rightarrow y_{cp} F = -\gamma \sin \theta I_{xx}$$

I_{xx} = گشتاد اینرسی حول محور xx



$$\Rightarrow y_{cp} = -\gamma \sin \theta \frac{I_{xx}}{P_{cg} A} = -\sin \theta \frac{I_{xx}}{h_{cg} A}$$

موقعیت مرکز فشار پایین تر از موقعیت مرکز جرم (توزیع فشار غیر یکنواخت)

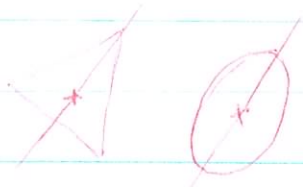
$$x_{cp} F = \iint x P dA = \iint x (P_a + \gamma (\xi_{cg} - y) \sin \theta) dA$$

$$\iint x P_a dA = 0$$

$$\iint x \gamma \sin \theta \xi_{cg} dA = 0$$

$$x_{cp} F = -\gamma \sin \theta \iint x y dA \Rightarrow \frac{\iint x y dA}{I_{xy}}$$

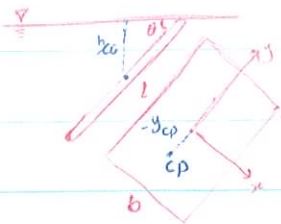
$$x_{cp} = -\gamma \sin \theta \frac{I_{xy}}{P_{cg} A} = -\sin \theta \frac{I_{xy}}{h_{cg} A}$$



$$x_{cp} = 0 \quad (I_{xy} = 0) \rightarrow \text{برای هندسه های متناظر منفرجه است}$$

سطح های متناظر حول $y = y$ دسان نمی کنند مگر حول CG دسان دارد

* در اغلب مسائل صفا از هر دو طرف تحت فشار P است $\leftarrow P$ حذف می شود $(P_{cg} = h_{cg} \gamma)$



مثال: محاسبه نیروی عمل افقی بر روی

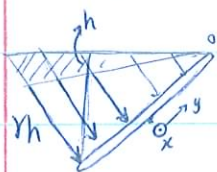
برای صفحه: $A = lb$ $I_{xx} = \frac{bl^3}{12}$ $I_{xy} = 0$

روشن اول: $F = P_{cg} \times A = \gamma h_{cg} A = \gamma \frac{l}{2} \sin \theta \times bl$

$= \frac{\gamma}{2} b l^2 \sin \theta$

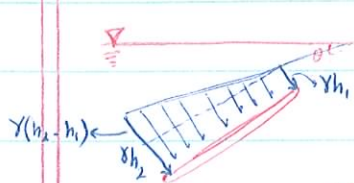
$x_{cp} = 0$ $y_{cp} = -\frac{\gamma \sin \theta}{\gamma h_{cg}} \times \frac{I_{xx}}{P_{cg} A} = -\frac{\gamma \sin \theta}{\gamma h_{cg}} \times \frac{\frac{1}{12} bl^3}{\gamma h_{cg} bl} = -\sin \theta \times \frac{l^2}{12 h_{cg}} = \frac{-h_{cg} \times l^2}{\frac{l}{2}} = -\frac{l}{6}$

روشن دوم: بارگذاری مانند استیک



$F = \frac{\gamma h}{2} \times Lb$ ($h = L \sin \theta$)

عمل بارگذاری مثلث 1/3 از پایین



ملاحظه کنید: محاسبه بارگذاری: بارکنش دوم

$F = \left(\gamma h_1 + \left[\frac{\gamma (h_2 - h_1)}{2} \right] \right) b l$

حل از



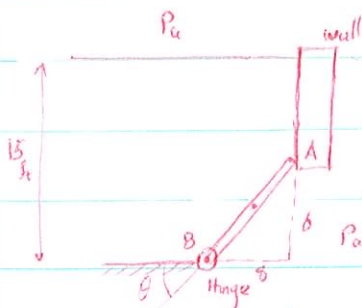
$\bar{y} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F} = \frac{\left(\frac{l}{2} \gamma h_1 + \frac{l}{3} \frac{\gamma (h_2 - h_1)}{2} \right) b l}{F_A}$

مثال: محاسبه است:

(a) نیروی فشاری وارد بر دیچه

(b) نیروی افقی وارد بر دیواره در A (معین اصطفاک)

(c) معکوس العمل که در لولای B



$\gamma_w = 64 \frac{lb_f}{ft^3}$



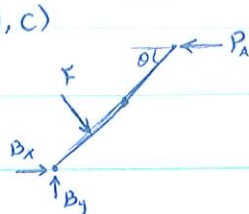
$A = 5 \times 10 = 50 \text{ ft}^2$ $h_{cg} = 15 - 3 = 12 \text{ ft}$

$I_{xy} = \iint xy \, dA = 0$ $I_{xx} = \frac{bl^3}{12} = \frac{5 \times 10^3}{12} = 417 \text{ ft}^4$

a) $F = \gamma h_{cg} \times A = 64 \times 12 \times 50 = 38400 \text{ lb}_f$

a) $\bar{y} = -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{cg} \times A} = \frac{-417 \times 0.6}{12 \times 50} = -0.417 \text{ ft}$ $x_{cp} = 0$

b), c)



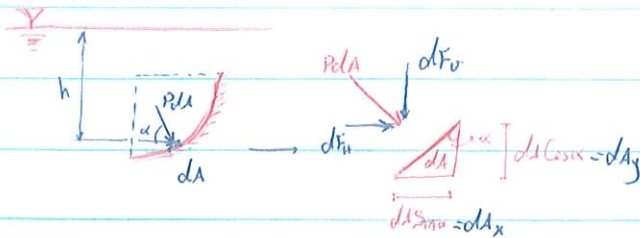
$\sum M_B = 0 \quad P_A \sin \theta = F (5 - 0.417) \Rightarrow P_A = 29300 \text{ lb}_f$

$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x - P_A + F \sin \theta = 0 \rightarrow B_x = 6300 \text{ lb}_f$

$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y = F \cos \theta \rightarrow B_y = 30700 \text{ lb}_f$

Hydrostatics Force on curved submerged Surface

نیروی هیدرواستاتیکی روی سطوح منحنی شکل



* به جای نیروی PdA از نیروی افقی و عمودی

استفاده کرد و سپس مجموع می گیریم

$$dF_H = PdA \cos \alpha = PdA_y \rightarrow \text{تصور این } dA \text{ بر صفحه قائم}$$

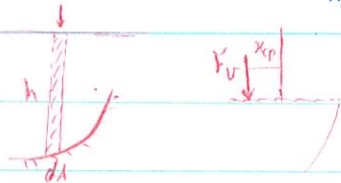
$$F_H = \iint PdA_y = P_{CG} \times A_y^*$$

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A} = -\frac{I_{xx}}{h_{CG} A}^*$$

عمل اثر:

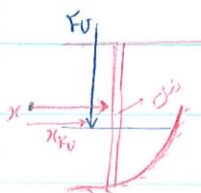
$$dF_V = PdA \sin \alpha = PdA_x \quad \text{تصور این } dA \text{ بر صفحه افقی}$$

$$F_V = \iint (P_a + \gamma h) dA_x = \iint P_a dA_x + \iint \gamma h dA_x = \underbrace{P_a A_x}_{W_{air}} + \underbrace{\gamma V}_{W_{fluid}}^*$$



x در صورتی که سطح خمیده از طرف دیگر تحت فشار P_a باشد

$$F_V = \gamma V \quad (P_a A_x = 0)$$



$$\iint x dF_V = \iint x \gamma dV = x_{FV} F_V$$

$$x_{FV} = \frac{\iint x dV}{V}$$

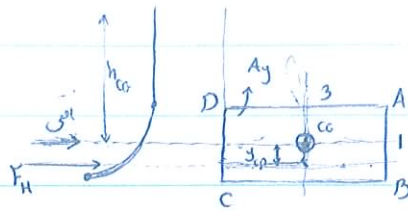
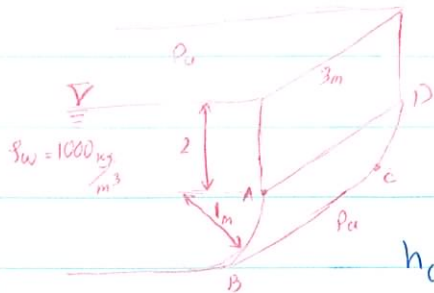
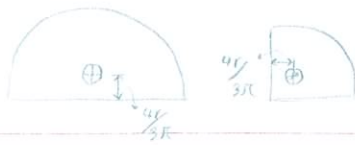
عمل اثر نیروی عمودی در مرکز جرم قرار دارد

عمل اثر:

جمع بندی:

- 1) مؤلفه افقی نیروی دارد بر یک سطح خمیده (از نقطه نظر اندازه و مرکز اثر) برابر است با نیروی دارد بر سطح عمود بر آن در صفحه قائم
- 2) مؤلفه قائم نیروی دارد بر یک سطح خمیده برابر است با وزن سیالی که بالای سطح خمیده قرار گرفته و مرکز اثر آن در مرکز جرم آن سیال قرار دارد (صفحه از هر دو طرف تحت فشار P_a باشد)

مثال مطلب یعنی مؤلفه قائم و افقی نیروی هیدرواستاتیکی دارد بر سطح خمیده ABCD

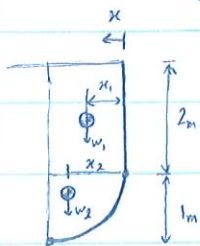


تصویر در راستای افقی

$$h_{CG} = 2 + 0.5 = 2.5 \text{ m}$$

$$F_H = P_{CG} A_y = \gamma h_{CG} (3 \times 1) = \gamma h_{CG} A_y = 10^3 \times 9.81 \times 2.5 \times 3 = 73.575 \text{ kN}$$

$$y_{CP} = - \frac{I_{xx}}{h_{CG} A_y} = - \frac{bL^3/12}{h_{CG} A_y} = - \frac{0.25^3}{2.5 \times 3} = -0.033$$



دایره P_{CG} دایره

برای نیروی عمودی دو سمت می‌گیریم

$$F_V = W_1 + W_2 = \gamma U_1 + \gamma U_2 = \gamma U_y = 10^3 \times 8.356 \times 9.81 = 81.97 \text{ kN}$$

$$U = 3 \left(2 \times 1 + \frac{\pi \times 1^2}{4} \right) = 8.356 \text{ m}^3$$

چون محض یکواخت است مرکز جرم مرکز سطح

یعنی γx ساده شده

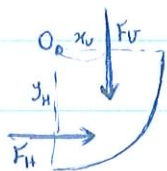
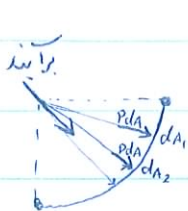
$$x_1 A_1 + x_2 A_2 = x_{CV} A = \iint_A x dA$$

$$0.5 \times 2 + \left(1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) \times \frac{\pi (1)^2}{4} = x_{CV} \times \left(2 + \frac{\pi (1)^2}{4} \right) \Rightarrow x = 0.5213 \text{ m}$$

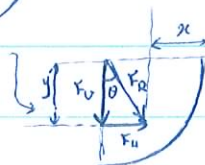
$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

رابطه دیگر داشتن مرکز اثر F_V : چون غای نیروهای وارد بر سطح خمیده متساوی بوده پس نیروی برآیند نیز از مرکز عبور می‌کند

(راه هندسی)

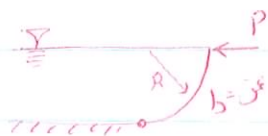


$$F_V x_V = F_H y_H \rightarrow \text{برایند حل 0 صفر}$$



$$\tan \theta = \frac{F_H}{F_V} = \frac{1-x}{y} \rightarrow x = \sqrt{0.5, 0.033}$$

از آن نیروی عمودی

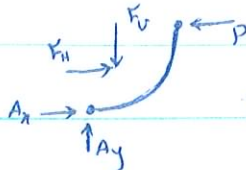
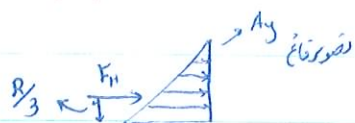


مثال ۱: P لازم برای نگهداری دیواره

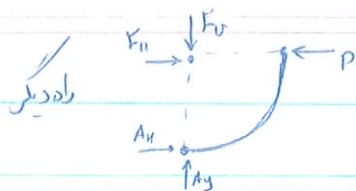
$$F_H = P_{CG} A_y = \gamma h_{CG} A_y = \gamma \frac{R}{2} \times R \times b$$

$$F_V = \gamma U = \gamma \times \pi \frac{R^2}{4} \times b$$

$$x = R - \frac{4R}{3\pi}$$

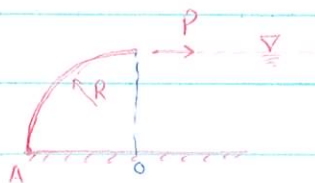


$$\sum M_A = 0$$



$$\sum M_A = 0 \quad F_H \times R = P \times R \Rightarrow P = F_H = \gamma \frac{R^2}{2} \times b$$

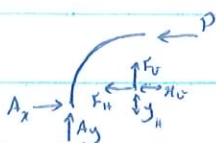
* علت اشتغال F_H و F_V حول O همان ندارد پس می توان به O منتقل کرد
(با برآیند F_H و F_V از O می گذرد)



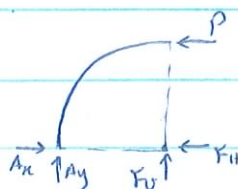
مثال، P = ?

x محل اثر نیروی عمودی سیال بالای سطح خمیده

تا سطح آزاد ← مرکز جاذب مورد توجه = مرکز سطح = مرکز اثر F_V



راه دوم



$$\sum M_A = 0$$

$$PR = F_V R \rightarrow P = F_V$$

نسبت جاذب مورد توجه بالا

$$= \gamma V = \gamma (R^2 - \pi \frac{R^2}{4})$$

Hydrostatics Forces on Submerged Bodies

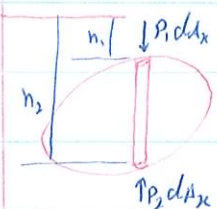
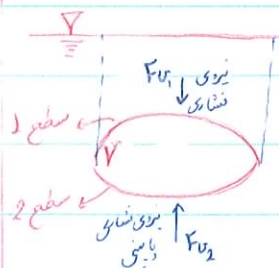
نیروی هیدرواستاتیک وارد بر اجسام غوطه ور

* نیروی افقی وارد بر این سطح ضرایب (تصویر دو سطح را در چپ بکی)

$$F_B = F_{V2} - F_{V1} = \text{وزن سیال بالای سطح 1} - \text{وزن سیال بالای سطح 2}$$

$$= \text{وزن سیال جابجا رفته} = \text{وزن سیال معادل حجم جسم}$$

$$= \text{جسم V سیال}$$



$$F_B = \iint_{\text{body}} P_2 dA_x - P_1 dA_x = \iint_{\text{body}} (P_2 - P_1) dA_x$$

$$= \iint_{\text{body}} [(P_0 + \gamma h_2) - (P_0 + \gamma h_1)] dA_x = \gamma \iint_{\text{body}} (h_2 - h_1) dA_x$$

$$= \gamma \iiint dV = \text{جسم V سیال}$$

* این نیرو هواره به سمت بالاست (به اندازه F_B جسم سبکی شود)

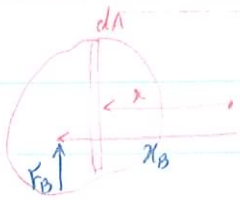
$$F_B = \text{نیروی ارشمیدس} = \text{نیروی شناوری} = \text{جسم V سیال}$$

- برای یک جسم در اعماق مختلف سیال نیروی شناوری یکسان است

- سبک تر شدن جسم غوطه ور به اندازه نیروی ارشمیدس

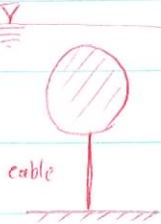
- نیروی ارشمیدس برای جسم غوطه ور تابعی از حجم جسم است نه وزن جسم

- محل اثر نیروی شناوری مرکز جرم جسم است



$$\iint x dF_B = \iiint x \gamma dV = \gamma V_B \bar{x}_B \quad \bar{x}_B = \frac{\iiint x dV}{V}$$

موقعیت اثر نیروی شناوری در مرکز حجم سیال (جسم)



تension: ?

$$W = 8.5 \text{ kN}$$

$$D = 1.5 \text{ m}$$

$$\gamma_w = 10.1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$



$$T = F_B - W$$

$$F_B = \gamma V = 10.1 \times 10^3 \times \pi \times \frac{(1.5)^3}{6} = 17859$$

$$T = 1.785 \times 10^4 - 0.85 \times 10^4 = 9.35 \text{ kN}$$

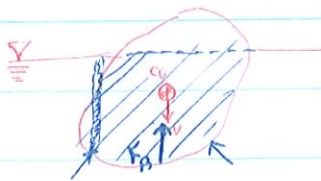
بارگذاری:



Floating Bodies (اجسام شناور)

* شناوری افقی نیروی دارد به جسم هم را خنثی می کند

* F_B در مرکز حجم هائور خورده قرار دارد



$$F_B = \gamma_{\text{سیال}} V_{\text{غوطه‌ور}}$$

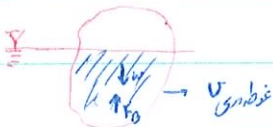
displaced volume

* سیال نیز به اندازه‌ی غوطه‌ور جا به جایی شود

$$F_B = W_{\text{جسم}} = \gamma_{\text{جسم}} V_{\text{جسم}}$$

$$\Rightarrow \gamma_{\text{جسم}} < \gamma_{\text{سیال}}$$

مثال، چه درصدی از حجم کل یک کوه یخی روی سطح آب قرار می گیرد؟



$$\sum F_y = 0$$

$$W_{\text{کوه}} = F_B$$

$$\rho_{\text{غوطه‌ور}} V_{\text{غ}} = \rho_{\text{آب}} V_{\text{کل}}$$

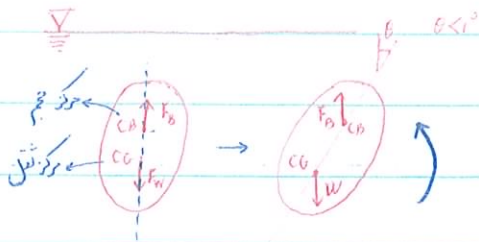
$$\frac{V_{\text{غوطه‌ور}}}{V_{\text{کل}}} = \frac{\rho_{\text{غ}}}{\rho_w} = 0.917 \rightarrow 91.7\% \quad \text{داخل} \quad 8.3\% \quad \text{داخل}$$

$$\rho_w = 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \quad \rho_{\text{غ}} = 57.2 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$$

Stability (پایداری)

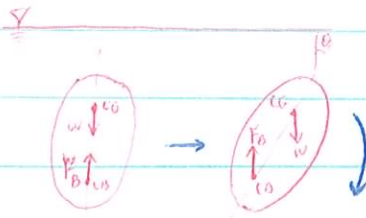
اجسام کاملاً غوطه‌ور (submerged bodies)

(جکایی یکسان است: $CG = CB$)



دو نیرو سبب گشتاور و افزایش
انحراف زادی ای است

→ Stable است



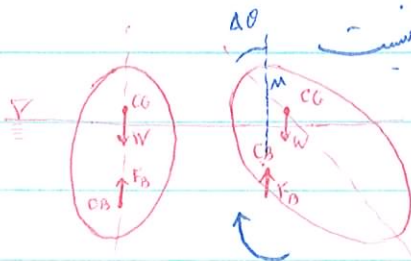
دو نیرو سبب گشتاور و افزایش
انحراف زادی ای می شود

→ unstable

* اگر CG و CB در یک نقطه باشد ← neutral (در هر حالت قرار بدیم همان طور باقی می ماند)

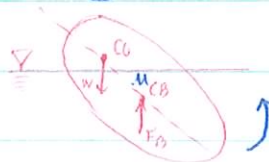
اجسام شناور (Floating bodies)

برای پایداری اجسام شناور نیازی به پایین بودن CG نسبت به CB نیست



گشتاور سبب کاهش
انحراف می شود

→ Stable



گشتاور سبب افزایش
انحراف می شود

→ unstable

$MG = \text{Meta Centre}$ (متا مرکز)

* اگر M بالاتر از CG قرار بگیرد ← پایدار است

اگر M پایین تر از مرکز ثقل قرار بگیرد ← ناپایدار است

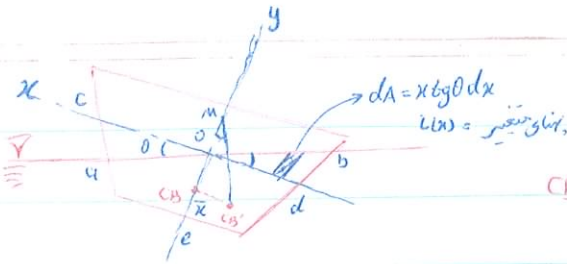
M	G
G	M
B	B
$MB > MG$	$MB < GB$
$MG > 0$	$MG < 0$
پایدار	ناپایدار

اگر CG بالاتر باشد ← در حالت دارد $GB > 0$

M
 B
 G

$GB < 0$

اگر CG پایین تر باشد ← همیشه Stable است



محاسبه مرکز ثقل
فرضیات: θ کوچک، عدم تغییر θ در تغییر CB - CB'

تغییر موقعیت جدید CB' بعد از انحراف

$$\bar{x}_{\text{obcde}} = \int_{\text{coda}} x dv + \int_{\text{obd}} x dv - \int_{\text{cou}} x dv \quad (\text{پاشن مرکز حجم})$$

$$= 0 + \int_{\text{obd}} x L dA - \int_{\text{cou}} x L dA \quad \begin{matrix} dA > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$= 0 + \int_{\text{obd}} x L (\tan \theta dx) - \int_{\text{cou}} x L (-\tan \theta dx)$$

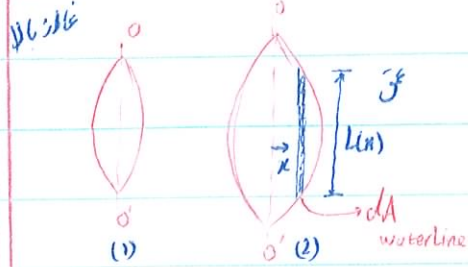
$$= \tan \theta \int x^2 dA = I_o \tan \theta$$

گستره سطحی برتری حول CG

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}}{\tan \theta} = \bar{MB} = \frac{I_o}{V_{\text{submerged}}} = \bar{MG} + \bar{GB}$$

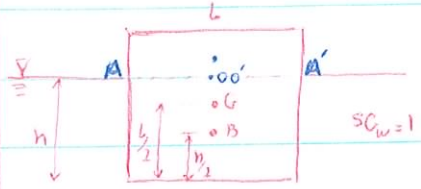
$$\bar{MG} = \frac{I_o}{V_{\text{sub}}} - \bar{GB} > 0$$

مایلای G و B است $\rightarrow$



* (2) از (1) پایدارتر است $I_{o1} < I_{o2}$

مثال: قطعه یخ به شکل مکعب به طول L در آب شناور است. وزن مخصوص قطعه یخ $SG_{\text{ice}} = 0.88$ است تحت شرایط شکل آیا قطعه یخ پایدار است



محاسبه h : $W_{\text{ice}} = F_B$

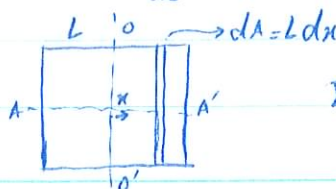
$$\gamma_{\text{ice}} V_{\text{ice}} = \gamma_{\text{water}} V_{\text{sub}}$$

$$SG_{\text{ice}} \times \gamma_{\text{water}} \times V_{\text{ice}} = \gamma_{\text{water}} V_{\text{sub}}$$

$$\Rightarrow SG_{\text{ice}} \times L^3 = h L^2 \Rightarrow h = SG_{\text{ice}} L$$

(حالت خاص: $SG_{\text{ice}} = 1$, $h = L$ ← غوطه در می شود)

محاسبه مرکز ثقل: $\bar{MG} = \frac{I_o}{V_{\text{sub}}} - \bar{GB}$



$$I_o = \frac{b L^3}{12} = \frac{L \times L^3}{12} = \frac{L^4}{12}$$

$$V_{\text{sub}} = h L^2$$

$$\bar{GB} = \frac{L}{2} - \frac{h}{2}$$

$$\overline{MG} = \frac{L^4}{12 \times h L^2} - \left(\frac{L}{2} - \frac{h}{2} \right) = \frac{L}{12 SG_{ice}} - \left(\frac{L}{2} - \frac{SG_{ice} L}{2} \right)$$

$$= 1 - 6 SG_{ice} + 6 SG_{ice} \xrightarrow{\text{شرط پایداری 2}} SG_{ice} \geq 0.789 \quad SG_{ice} = 0.88 \quad \text{stable}$$

تر پایداری

Fluid in rigid-body motion (سیال در حرکت جسم صلب)

استفاده از قانون دوم نیوتن برای سیال در حالت حرکت جسم صلب (عدم حرکت لایه ای سیال)

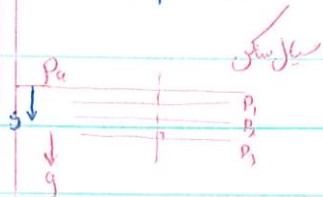
$$d\vec{F} = \vec{a} dm = \vec{a} \rho dV = \rho \vec{a} dV$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$

∇p : نیروی خالص فشاری
 $\rho \vec{g}$: نیروی جاذبه
 $\rho \vec{a}$: نیروی حاصل از شتاب

$$\nabla p = \rho (\vec{g} - \vec{a})$$

$\vec{g} - \vec{a}$: خطوط فشار ثابت در راستای
 عمود است (مثال سطح آزاد)
 گرادیان در راستای $\vec{g} - \vec{a}$ عمل می کند



$$\nabla p = \rho (\vec{g} - \vec{g}) = 0$$

در لایه حاشیه سطح آزاد - فشار در لایه برابر در هر نقطه

Uniform Linear Acceleration (1) (شیب خطی شتاب)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z$$

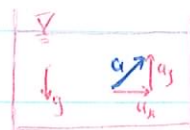
$$\vec{g} = (g_x, g_y, g_z) \quad , \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{g} = (0, -g)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = \rho a_z$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho (g + a_z) \end{cases}$$



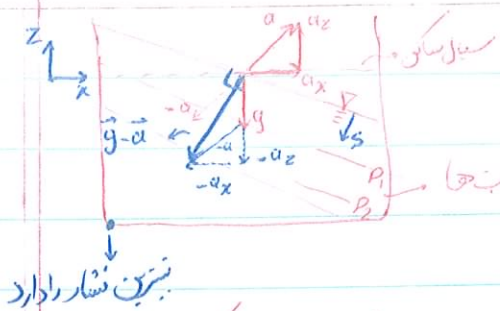
change rule

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = (-\rho a_x) dx + (-\rho (g + a_z)) dz$$

$$dp = 0 \quad \text{سطح فشار ثابت}$$

برای هر خط فشار ثابت (خط آزاد)

$$dp = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-a_x}{g + a_z}$$



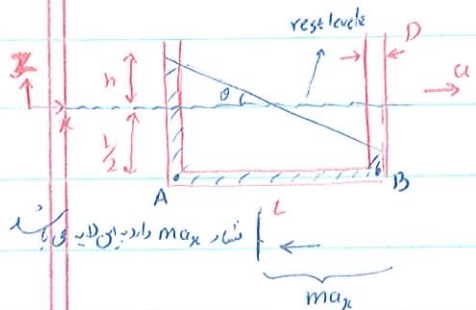
$$\frac{dp}{ds} = \rho G$$

$$G = [a_x^2 + (g + a_z)^2]^{1/2}$$

میدان گرانشی

مثال: در یک حوضچه U شکل برای اندازه گیری فشار سیال استفاده کرد برای شکل زیر مطلقاً تعیین h اگر فشار در مرکز

دارد $6 \frac{m}{s}$ $L = 18 \text{ cm}$ $d = 5 \text{ mm}$



$$\frac{dz}{dx} = \frac{-a_x}{g + a_z} = \frac{-a_x}{g} = -\tan \theta = -\frac{h}{L/2}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{2h}{L}g \quad \text{or} \quad h = \frac{L}{2} \frac{a_x}{g} = 5.5 \text{ cm}$$

I $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$ (کاهش فشار) $\rightarrow$ اختلاف فشار A-B (اگر شیب رابط دیگر معادله بریم حد و حد میانی می شود)

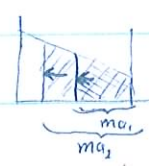
II $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z) = -\rho g$ (کاهش فشار) $\rightarrow$ حد و حد میانی $\rightarrow$ در این راستا

$$\begin{cases} P_B = \gamma h_B = \gamma(L/2 - h) \\ P_A = \gamma h_A = \gamma(L/2 + h) \end{cases} \quad P_A - P_B = 2\gamma h$$

II $h = \frac{L}{2} \frac{a_x}{g} \rightarrow P_A - P_B = \rho L a_x$

I) $\rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta x} = -\rho a_x \quad \frac{P_B - P_A}{L} = -\rho a_x$

در رابط یکدیگر را پیدا کنید



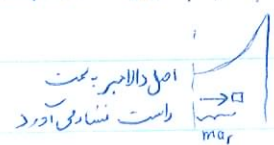
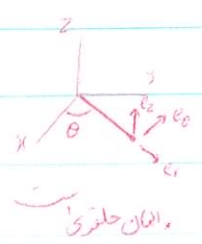
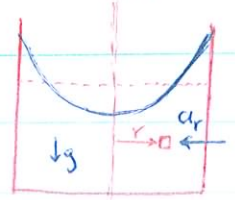
* اگر ظرف بسته باشد شکل تابع عوض می شود، سطح آزادندیم، اما خطوط فشار ثابت مانند قبل بدست می آید



Rigid Body Rotation

ω ثابت است، شتاب جانبی مرکز $a_r = r\omega^2$

شتاب شل داریم



انرژی $\rightarrow$ افزایش $\rightarrow$ افزایش فشار

$$\nabla p = \rho(g - a)$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{e}_z$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} a_r = -r\omega^2 \\ \vec{g} = -g\vec{e}_z \end{cases} \quad a_\theta = a_z = 0$$

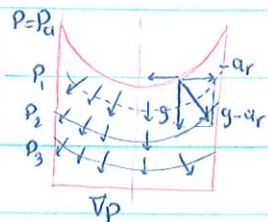
scale factor تبدیل طول می کند

$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \Omega^2$ $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ $\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma$
 افزایش فشار با افزایش شعاع (با افزایش ارتفاع خود را نشان می دهد) فشار ثابت در جهات شعاعی و عمودی ثابت در جهت z

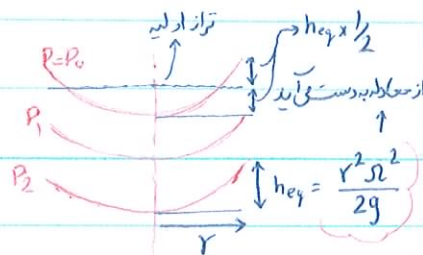
$dp = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho r \Omega^2 dr - \gamma dz$
 $\int dp = \int \rho r \Omega^2 dr - \int \gamma dz \Rightarrow P = \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 - \gamma z + C$

$\Rightarrow P = P_0 - \gamma z + \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2$

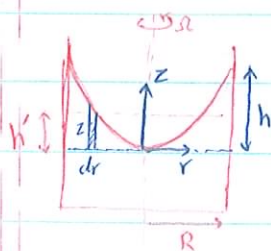
هدف: یافتن سطح فشار ثابت $P = P_1$ r : افزایش فشار z : کاهش فشار
 $z = \frac{P_0 - P_1}{\gamma} + \frac{r^2 \Omega^2}{2g} = a + br^2$



سطح فشار ثابت بر $\vec{g} - a_r$ عمود است



مثال: مطلوب است تعیین رابطه h بر حسب Ω



$z = \frac{P_0 - P_1}{\gamma} + \frac{r^2 \Omega^2}{2g}$

$\begin{cases} (z, r) = (0, 0) \\ P_0 = P_a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{در سطح آزاد} \\ P_1 = P_a \end{cases} \rightarrow z = \frac{r^2 \Omega^2}{2g}$

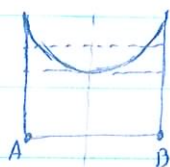
$z|_{r=R} = \frac{R^2 \Omega^2}{2g} = h$

$V_1 = \text{حجم کل ارتفاع } h \text{ بالای سطح} = \int 2\pi r z dr = \int 2\pi r \frac{r^2 \Omega^2}{2g} dr = \pi \frac{\Omega^2 R^4}{4g}$

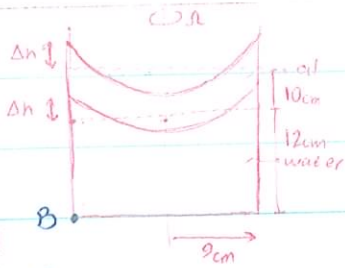
$\pi \frac{\Omega^2 R^4}{4g} = \pi R^2 h' \rightarrow h' = \frac{\Omega^2 R^4}{4g} = \frac{h}{2}$

$\frac{h}{2}$ از تراز اولیه بالا و پایین می رود

$V_2 = \pi R^2 h - \pi R^2 \frac{h}{2} = \pi R^2 \frac{h}{2}$



* A, B: بیشترین فشار را دارد
 در راستای z محدود استاتیکی است پس بزرگ ارتفاع آن حساب می شود



؟ فشار Max، چرخش

س = ΔH (a) مثال

$$a) \Omega = 150 \times \frac{2\pi}{60} = 15.7 \text{ rad/s}$$

$$\Omega = 150 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

$$\Delta H = \frac{R^2 \Omega^2}{4g} = 0.051 \text{ cm}$$

b)

$$P_B = \rho g \Delta z_{\text{oil}} + \rho g \Delta z_{\text{water}} = (891)(9.81)(0.1) + (998)(9.81)(0.12 + 0.051) = 2550 \text{ pa}$$

فشار gauge است

Control Volume Formulation

مربوط استرگای برای حجم کنترلی

System: مقدار جرم مشخص و ثابت در فضا

control volume: هر حجم در فضا (قابل حرکت و تغییر شکل - جرمی تواند ثابت نباشد) ← مناسب برای تحلیل مسائل

Basic Law for a System:

- Conservation of mass: $M_{\text{sys}} = \text{const}$ or $\frac{dm}{dt} \Big|_{\text{sys}} = 0$ mi $dm = \rho dv$

$$\rho M_{\text{sys}} = \int dm = \int \rho dv$$

- Conservation of linear momentum

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm = \int \vec{v} \rho dv$$

$$\vec{p}_{\text{sys}} = \int_m \vec{v} dm = \int \vec{v} \rho dv$$

- Conservation of angular momentum

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$\vec{H} = \int_m \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times \vec{v} \rho dv$$

$$\vec{H}_{\text{sys}} = \int_m \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times \vec{v} \rho dv$$

موقعیت برداری
حاصل ضرب برداری

گشتاور حول مرکز جرم سیستم

- 1st law of thermodynamics

$$dQ - dW = dE$$

↓
کار اضافی
نرمط سیستم

تغییر انرژی
سیستم

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \Big|_{\text{sys}}$$

نری

$$E_{\text{sys}} = \int_m e dm = \int \rho e dv$$

انرژی بر واحد جرم

$$e = e_{\text{internal}} + e_{\text{kinetic}} + e_{\text{potential}} + e_{\text{other}}$$

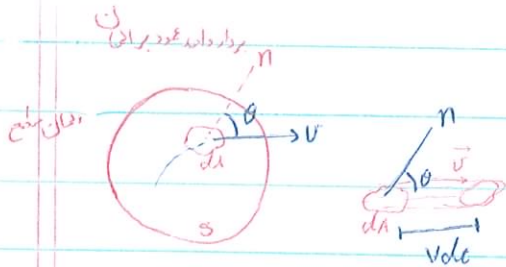
↓
نظیر و انرژی های شیمیایی

حالت کلی:

$$B_{\text{system}} = \int_{\text{mass}} \beta \, dm = \int \beta \rho \, dV \quad \left(\beta = \frac{dB}{dm} \right)$$

خواص مادی (extensive property) → خواص شدنی (intensive property)

$B = m \quad \beta = 1$
 $B = \bar{P} \quad \beta = V$
 $B = \bar{H} \quad \beta = \bar{r} \times \bar{U}$
 $B = E \quad \beta = e$



Volume flow rate →

Mass flow rate

مقدار عبور سیال عبوری از سطح dA در جهت n : $dV = v \, dA \cos \theta = (\vec{v} \cdot \hat{n}) \, dA \, dt$

نرخ جریان حجمی dA : $dQ = \frac{dV}{dt}$

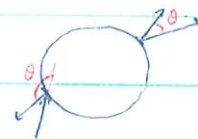
نرخ جریان حجمی کل از S : $Q = \int_S dQ = \int_S \frac{dV}{dt} = \int_S (\vec{v} \cdot \hat{n}) \, dA$ $\frac{m^3}{\text{sec}}$

$\vec{v} \cdot \hat{n} > 0 \rightarrow \text{outflow}$

$\vec{v} \cdot \hat{n} < 0 \rightarrow \text{inflow}$

(عبارت بالا را در ضرب کنیم)

نرخ جریان جرمی کل از S : $\dot{m} = \int_S \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) \, dA$ $\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$

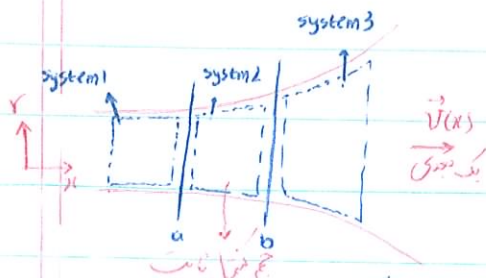


$\dot{m} = \rho \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA = \rho Q$

حالت چگالی ثابت:

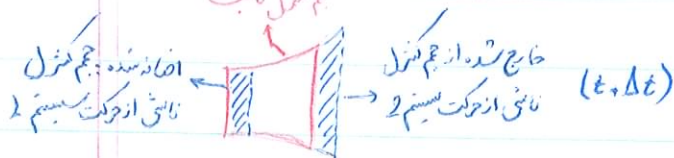
the Reynolds Transport Theorem (RTT)

بیان تغییرات برای حجم کنترل / ارتباط بین سیستم و حجم کنترل



(t)

در زمان t حجم کنترل سیستم 2 برهم منطبق است.
بعد از Δt سیستم 1 جرم وارد می کند، سیستم 2 جرم دیگری خارج می کند (سطح منطبق مختلف)



(t + Δt)

$dV_{in} = A_a v_a \, dt$

$dV_{out} = A_b v_b \, dt$

$B_{cv} = \int_{cv} \beta \rho \, dV$, $\beta = \frac{dB}{dm}$ (مانند سیستم)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\beta_{cv}) &= \frac{1}{\Delta t} \beta_{cv}(t + \Delta t) - \frac{1}{\Delta t} \beta_{cv}(t) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\beta_2(t + \Delta t) - (\beta \rho dv)_{out} + (\beta \rho dv)_{in} \right] - \frac{1}{\Delta t} \beta_2(t) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\underbrace{\beta_2(t + \Delta t) - \beta_2(t)}_{\text{system}} \right] - \left[(\beta \rho AV)_{out} - (\beta \rho AV)_{in} \right] \end{aligned}$$

از قبل $\left(\frac{dv}{dt} = AV \right)$

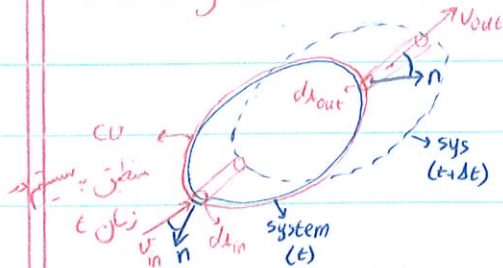
$$\frac{d\beta}{dt} \Big|_{\text{system}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \beta \rho dv \right) + \underbrace{(\beta \rho AV)_{out}}_{\text{تغییر خاصیت B از سطح خروجی کنترل}} - \underbrace{(\beta \rho AV)_{in}}_{\text{تغییر خاصیت B از سطح ورودی کنترل}}$$

تغییرات خاصیت B درون سیستم نرخ تغییرات خاصیت B درون CV منطبق بر سیستم

معادله یک بعدی
انتقال و پخش

(تغییر مکانی) (دیدگاه ایلری) (تغییر زمانی) (دیدگاه لاکرانژی)
< به کمک تانژن بتا جایگذاری کنیم >

Arbitrary Fixed Control Volume



$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} \Big|_{\text{sys}} &= \frac{d}{dt} \beta_{cv} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{cv} \beta \rho dv + \int_{cs} \beta \rho V \cos \theta dA_{out} + \int_{cs} \beta \rho V \cos \theta dA_{in} \right\} \end{aligned}$$

(هم منطبق هم نسبت) به جای ورودی و خروجی

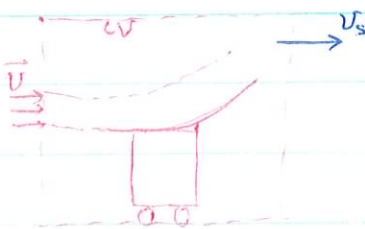
$$\frac{d\beta}{dt} \Big|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \beta \rho dv \right) + \int_{cs} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

روی کل سطح (control surface)

حالات خاص:

(1) برای حجم کنترل ثابت (عدم تغییر حجم CV):

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \beta \rho dv \right) = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dv$$

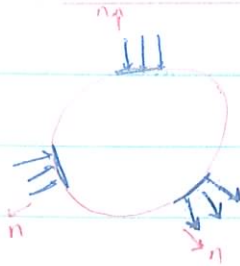


(2) برای حجم کنترل متحرک (با سرعت ثابت V_s):

$$\vec{V}_{\text{relative}} = \vec{V} - \vec{V}_s$$

از دیدگاه ناظر روی حجم کنترل سرعت جریان عبوری از CS

$$\frac{d\beta}{dt} \Big|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \beta \rho dv \right) + \int_{cs} \beta \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$



فرم یک بعدی معادله:

$$\int_{cs} \rho \mathbf{f}(\vec{v}_r, \vec{n}) dA = \sum (\beta_i \rho_i v_i A_i)_{out} - \sum (\beta_i \rho_i v_i A_i)_{in}$$

ρ, β در مکانهای n تغییر کنند

ρ_i, β_i, v_i در هر دو ورودی و خروجی ثابت

Conservation of Mass

($B=m, \beta=1$)

$$\frac{dm}{dt} \Big|_{sys} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \rho dV \right) + \int_{cs} \rho \mathbf{f}(\vec{v}_r, \vec{n}) dA = 0$$

کلین حالت:
 قانون بقای جرم $\rightarrow$ $\int_{cv} \rho dV$ قابل تغییر شکل $\rightarrow$ حجم کنترل متحرک $\rightarrow$ تراکم تغییر کند $\rightarrow$ بر اساس RT

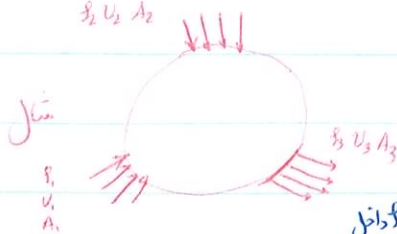
$$\int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{cs} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

حالت خاصی: ①
 متحرک داخل اشکالی ورودی بدون تغییر شکل $\rightarrow$ حجم کنترل ثابت

$$\int_{cs} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad \text{جریان دائم: } \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\xrightarrow{1D \text{ dimensional}} = \sum (\rho_i v_i A_i)_{out} - \sum (\rho_i v_i A_i)_{in} \Rightarrow \sum \dot{m}_i|_{out} - \sum \dot{m}_i|_{in} = 0$$

اگر سرعت بر سطح عمود نباشد $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_n$ استفاده می شود
 outflow $\rightarrow$ inflow $\rightarrow$



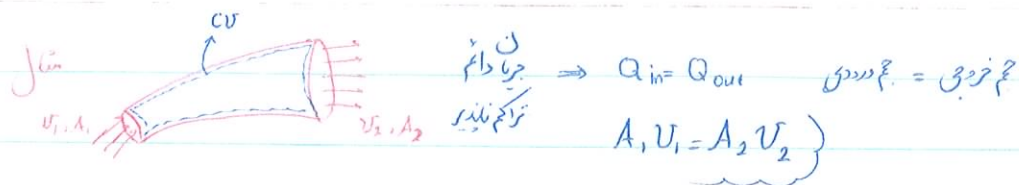
$$\rho_3 v_3 A_3 - \rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 = 0$$

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$$

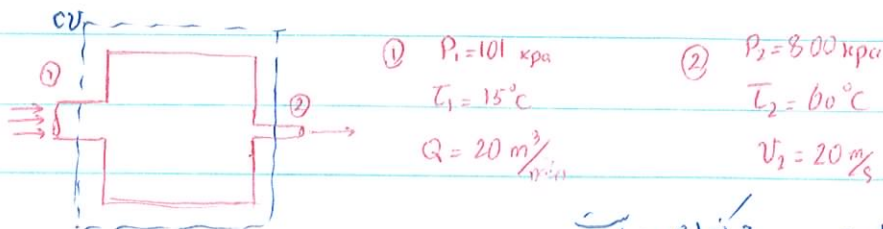
ثابت ρ داخل $\rightarrow$ ثابت $\dot{m}_{cv} \rightarrow \dot{m}_{cv} = 0$
 ثابت v_{cv}

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{cv}) + \int_{cs} (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA = 0$$

جریان تراکم ناپذیر است
 برای جریان تراکم ناپذیر است
 اگر فرض شود $\rightarrow$ جریان دائم
 $\rightarrow$ $\int_{cs} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$
 $\xrightarrow{1D} \sum (v_i A_i)_{out} - \sum (v_i A_i)_{in} = 0$
 $\sum (Q_i)_{out} - \sum (Q_i)_{in} = 0$
 $Q =$ دبی جرمی
 حجم کنترل متحرک $\rightarrow v_r \rightarrow v$
 قابل تغییر شکل $\rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{cv})$
 حجم کنترل ثابت $\rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{cv}) = 0$



مثال: کمپرسوری با مشخصات داده شده کار می کند. تعیین قطر D_2 تاسیست خروجی از $20 \text{ m}^3/\text{s}$ بیشتر نشود.



فرضیات: جریان دائم است، جرم کنترل ثابت است.

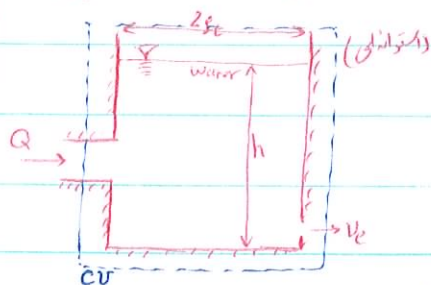
توازن جرم: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$

جرم ثابت $\Rightarrow \int_{CS} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$ $\xrightarrow{\text{جرم ثابت}} \rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0$

$\Rightarrow \rho_2 u_2 A_2 = \rho_1 Q_1 \Rightarrow A_2 = \frac{\rho_1 Q}{\rho_2 u_2} = \frac{P_1}{P_2} \times \frac{T_2}{T_1} \times \frac{Q_1}{u_2}$ $\xrightarrow{\text{جابجایی}}$

$\left(\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1}, \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} \right)$

مثال: به مخزن آب با دبی Q وارد شده و از لوله خروجی، آب با سرعت u خارج می شود. مطلوب است تعیین رابطه ی



رابطه ی $h(t)$ - انشای $h(t) > h_0$

$u_e = \sqrt{2gh}$ $D_e = 2''$ $Q_i = 0.35 \text{ m}^3/\text{s}$

مائع $\leftarrow$ تراکم پذیر $\leftarrow$ چگالی ثابت

جرم CV می تواند تغییر کند $\leftarrow$ جرم غیر دائم

(Continuity) $\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{CV}) + \int_{CV} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$

$\Rightarrow A_t \frac{dh}{dt} + (A_e u_e - Q_i) = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = (Q_i - A_e \sqrt{2gh}) \frac{1}{A_t}$

$h = 4 \text{ ft} \rightarrow A_e \sqrt{2gh} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{12} \right)^2 \sqrt{2 \times 32.2 \times 4} = 0.35 = Q_i \rightarrow \frac{dh}{dt} = 0$ $\xrightarrow{\text{حالت پایدار}}$

$h = 9 \text{ ft} \rightarrow Q_i - \sqrt{2gh} A_e < 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} < 0$

Linear Momentum equation

$$\vec{B} = m\vec{U} \quad \beta = \frac{dB}{dm} = \vec{U}$$

معادله $\frac{d}{dt}(m\vec{U})|_{sys} = \sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \vec{U} \rho dV \right) + \int_{cs} \vec{U} \rho (\vec{U}_r \cdot \hat{n}) dA$

تغییرات $m\vec{U}$ حجم کنترل
تغییرات مومنتوم در CV
شار خاص عبوری از CV

- عبارت $\vec{U}$ سرعت سرتیال نسبت به یک دستگاه مختصات اینرسی (بدون شتاب) است ($a_{rel}=0$)

- عبارت $\sum \vec{F}$ صورت جمع برداری تمام نیروهای اعمالی به CV است

$\sum \vec{F}_S$ شامل نیروهای سطحی روی عاقل سیال و جسم برش داده شده توسط CS

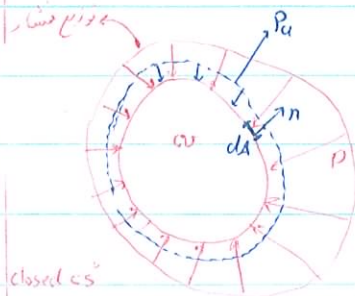
$\sum \vec{F}_B$ نیروی جبری شامل نیروی جاذبه و نیروی الکترودینامیک

- رابطه به صورت برداری است $U(u, v, w)$

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} \left(\int u \rho dV \right) + \int_{cs} u \rho (\vec{U}_r \cdot \hat{n}) dA$$

برای مؤلفه ی x تغییر می کند

Net pressure Force



$$\vec{F}_{pressure} = \vec{F}_{press} = \int_{cs} \vec{P}(-\hat{n}) dA$$

کل نیروی وارد به سطح

$$P = \text{ثابت} \Rightarrow \vec{F}_{net} = 0$$

P_a فشار ثابتی که به جسم وارد می شود اگر از توزیع فشار P کم شود P_{gage} می ماند

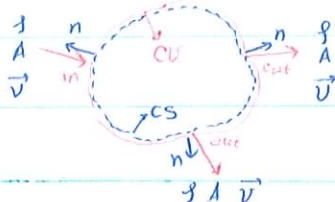
$$P_{gage} = P - P_a \quad (P_{gage} \text{ منفی نیز می تواند باشد})$$

For uniform pressure : $P = P_a = \text{const} \quad \vec{F}_{up} = \int_{cs} \vec{P}(-\hat{n}) dA = P_a \int_{cs} (-\hat{n}) dA = 0$

For nonuniform pressure : $\vec{F}_{press} = \vec{F}_{pressure} = \int_{cs} (P - P_a)(-\hat{n}) dA = \int_{cs} P_{gage}(-\hat{n}) dA$

① $\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \vec{U} \rho dV \right) + \int_{cs} \vec{U} \rho (\vec{U}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (\vec{U}_r = \vec{U})$

② 1 dimensional :



$$\dot{M}_{cs} = \int_{section} \vec{U} \rho (\vec{U} \cdot \hat{n}) dA$$

$$\Rightarrow \dot{M}_{section i} = U_i (\rho_i U_{n,i} A_i) = \dot{m}_i U_i$$

علامت $\dot{m}$ ورودی و خروجی را می دهد

$$\text{outflow} \leftarrow \dot{m}_i > 0$$

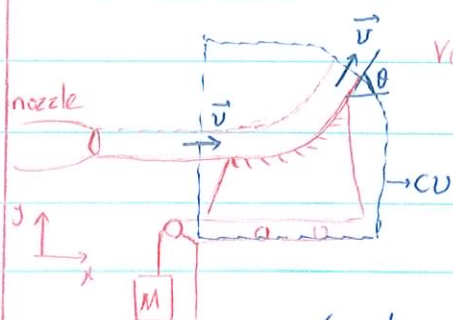
$$\text{inflow} \leftarrow \dot{m}_i < 0$$

تبدیل با علامت باید در نظر بگیریم

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \vec{v} \rho dV \right) + \dot{m}_i \vec{v}_i \Big|_{out} - \dot{m}_i \vec{v}_i \Big|_{in}$$

حالت چندهمگرمی و خردی

$$\sum \dot{m}_i \vec{v}_i \Big|_{out} - \sum \dot{m}_i \vec{v}_i \Big|_{in}$$



مثال، مطلوب است تعیین جرم و وزن M برای ثابت نگه داشتن Vane
 * نیروی وزن همان جرم M، نیروی $\sum F$ واد بر CV می باشد

فرض: سطح مقطع ثابت $\leftarrow \vec{v}$ برابر است

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \vec{v} \rho dV + \int_{cs} \vec{v} \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA$$

(جمع کنترل ثابت) $\vec{v} \rightarrow$ (ثابت)

(steady state) $\frac{d}{dt} \rightarrow 0$

$\sum F_{pressure} = 0$ (فشار یکدست در تمام سطح CV)

فرضیات 1) جریان دائم $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 2) سرعت در سطح مقطع ثابت ثابت 3) جریان تراکم ناپذیر

$$\sum \vec{F} = \int_{cs} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \dot{m} \vec{v} \Big|_{out} - \dot{m} \vec{v} \Big|_{in}$$

پیوستگی $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

اندازه برابر اما جهت متفاوت است

$$\vec{F} = T_{کشش} = \dot{m} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

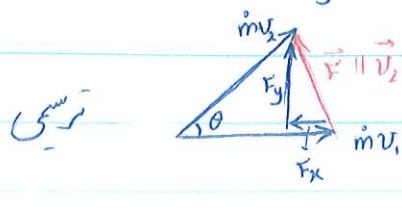
x-momentum : $\sum F_x = \dot{m} (\vec{v}_{2x} - \vec{v}_{1x})$

$$-Mg = \rho A v (v \cos \theta - v) \Rightarrow M = \frac{\rho A v^2}{g} (1 - \cos \theta)$$

y-momentum : $\sum F_y = \dot{m} (\vec{v}_{2y} - \vec{v}_{1y})$
 $= \rho A v (v \sin \theta)$

$\sum F_y$ نیروی است که Vane باعث تغییر جهت می شود
 نیرویی که به سبیل از طرف Vane وارد می شود

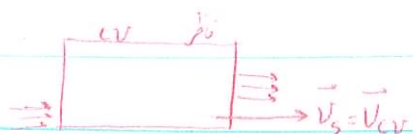
$$\Rightarrow F_y = \rho A v^2 \sin \theta$$



نیروی اعمالی مورد نیاز به CV
 برای ثابت نگه داشتن CV

نیروی اعمالی به Vane از طرف سبیل

قانون بقای مومنتوم خطی برای حجم کنترل متحرک



$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_{cv}$$

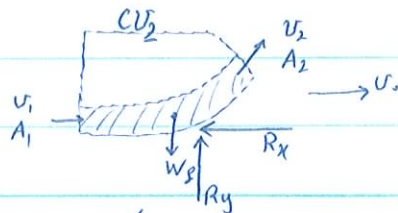
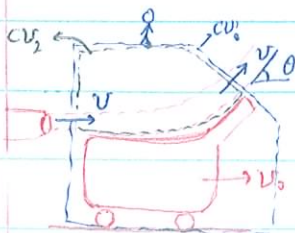
$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F &= \frac{d}{dt} \left(\int_{cv} \rho \vec{v} dv \right) + \int_{cs} \rho \vec{v} (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA \\ &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) dv + \int_{cs} \rho (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA \end{aligned}$$

فرض: جریان دائم $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Sigma F &= \int_{cs} \rho (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA \\ &= \int_{cs} \rho \vec{v}_r (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA + \int_{cs} \rho \vec{v}_{cv} (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA \end{aligned}$$

قانون بقای پیوستگی $\int_{cs} \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA = 0$

$\Sigma F = \int_{cs} \rho \vec{v}_r (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA$... $\times$ برای سرعت می کارفته یعنی باید کار برورد



مثال vane در حال حرکت است

R_y و R_x باید به CV وارد شوند تا با سرعت ثابت حرکت کند

$$\vec{F} = (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{out} - (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{in} \quad \text{relative}$$

قانون بقای پیوستگی $\rightarrow (\dot{m}_1)_r = (\dot{m}_2)_r$

$$\rho_1 A_1 (v_1 - v_0)_r = \rho_2 A_2 (v_2 - v_0)_r \Rightarrow (\vec{v}_1)_r = (\vec{v}_2)_r$$

$$(\vec{v}_1)_r = v_1 - v_0$$

x-mom : $-R_x = \underbrace{\rho_2 A_2 (v_2 - v_0)}_{(\dot{m}_2)_r} \underbrace{(v_1 - v_0) \cos \theta}_{(v_2)_r} - \underbrace{\rho_1 A_1 (v_1 - v_0)}_{(\dot{m}_1)_r} \underbrace{(v_1 - v_0)}_{(\vec{v}_1)_r}$

y-mom : $R_y - W_f = \underbrace{\rho_2 A_2 (v_2 - v_0)}_{(\dot{m}_2)_r} \underbrace{(v_1 - v_0) \sin \theta}_{(\vec{v}_2)_r} - 0$

تأثیر بقای حوضه زادری

$$B = \vec{H}_o = \int_{V_{sys}} (\vec{r} \times \vec{U}) dm = \int_{V_{sys}} \rho (\vec{r} \times \vec{U}) dv$$

$$\beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dH_o}{dm} = \vec{r} \times \vec{U}$$

$$\oint_0^0 \vec{r} \times \vec{U} dm$$

RTT : $\Sigma (\vec{M}_o)_{sys} = \frac{dH_o}{dt} \bigg|_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho (\vec{r} \times \vec{U}) dv + \int_{cs} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{U})}_{\beta} \underbrace{\rho (\vec{v} \cdot \hat{n})}_{d\dot{m}} dA$

که نسبت به دستگاه مختصات اینرسی بدل شتاب

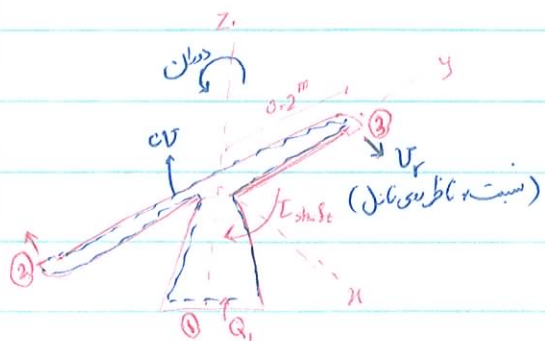
$$\sum M_o = \sum \vec{r} \times \vec{F}_o = T_{shaft} + \sum \vec{r} \times \vec{F}_s + \underbrace{\int_{cv} (\vec{r} \times \vec{g}) dm}_{\text{body force}}$$

one dimensional: (جهان درونی و خارجی یک‌نظافت در مقطع) (نسبت در تمام طول)

$$\int_{cs} (\vec{r} \times \vec{U}) \rho (\vec{U} \cdot \hat{n}) dA = \sum [(\vec{r}_i \times \vec{U}_i) \dot{m}_i]_{out} - \sum [(\vec{r}_i \times \vec{U}_i) \dot{m}_i]_{in}$$

مثال: جریان آب با نرخ دائم $Q = 1000 \text{ ml/s}$ از یک آب باقی درونی وارد شده و از دو نازل با سطح مقطع

$A_j = 30 \text{ mm}^2$ خارج می شود مطلوب است



(a) سرعت متوسط آب خروجی از نازل نسبت به نازل

(b) گشتاور مورد نیاز برای ثابت نگه داشتن آب باقی

(c) گشتاور مورد نیاز به اثرای سرعت درونی 500 rpm

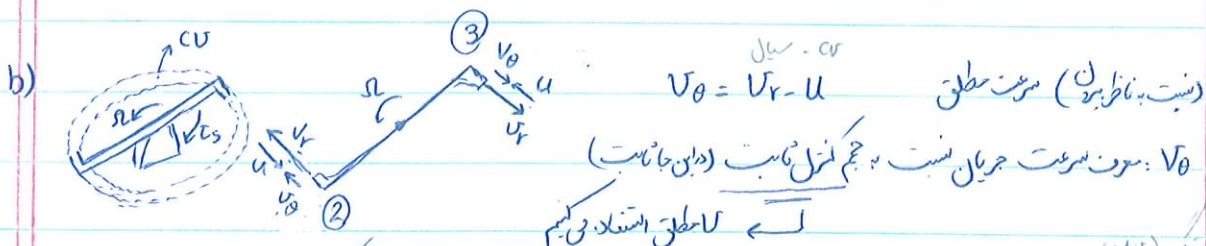
(d) سرعت درونی به ازای گشتاور صفر

$$a) \text{ قانون تئوری جرم: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dv + \int_{cs} \rho (\vec{U} \cdot \hat{n}) dA = 0 \Rightarrow -\dot{m}_{out} + \dot{m}_{in} = 0$$

جهان نسبت به نازل تغییر نمی کند

(سرعت متوسط آب خروجی از نازل نسبت به نازل)

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} \Rightarrow \rho Q_1 = 2(\rho A_j U_r) \Rightarrow U_r = \frac{Q_1}{2A_j} = 16.7 \text{ m/s}$$



سرعت - سیال

(نسبت به ناظر بیرون) سرعت مطلق

U_θ : سرعت حرکت جریان نسبت به حجم کنترل ثابت (در این حالت)

لا محظن استندانی کنیم

$$M_o = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} (\vec{r} \times \vec{U}) \rho dv + \int_{cs} (\vec{r} \times \vec{U}) \rho (\vec{U} \cdot \hat{n}) dA$$

برای

کابل درونی حل $z = 0$ نقطه خارجی داریم

$$\Rightarrow -T_s = \sum (\vec{r}_i \times \vec{U}_i) \dot{m}_i \big|_{out} \Rightarrow -T_s = -2r U_\theta \dot{m} \quad (3)$$

$$\dot{m}_2 + \dot{m}_3 = \dot{m}_1 \Rightarrow T_s = r U_\theta \dot{m}$$

$$b) U_\theta = U_r, U = r\Omega = 0 \quad \text{نقی}$$

$$T_s = r U_r \dot{m} = r U_r \rho Q_1 = 3.34 \text{ N.m}$$

$$c) U_\theta = U_r - U = U_r - r\Omega = 16.7 - (10.2)(500 \times \frac{2\pi}{60}) = 6.2 \text{ m/s}$$

* قانون تئوری جرم (در CV)
برای سرعت حرکت سیال (نسبت به ناظر بیرون)

* در تکامل خطی 10
نی $\dot{m} U$
نی $\dot{m} U$
نی $\dot{m} U$
نی $\dot{m} U$

$$T_S = r U_0 \dot{m} = 1.24 \text{ N.m} \quad \text{چپ}$$

$$d) T_S = r U_0 \dot{m} = r (U_r - r\Omega) \dot{m} = 0 \quad \text{(فرقی)}$$

$$\rightarrow U_r = r\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{U_r}{r} = 83.5 \text{ rad/s}$$

the Energy Equation

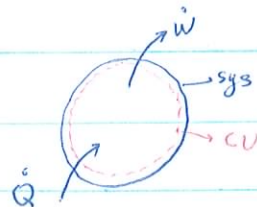
$$B = E \quad \beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dE}{dm} = e$$

e = system energy per unit mass

$$= \hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \Big|_{\text{sys}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV}_{E_{cv}} + \underbrace{\int_{cs} e \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA}_{\text{تغییر انرژی در سطح دخیلی}}$$

نرخ گرمایی اضافه شده
به سیستم یا جمع کردن
توسط سیستم یا CV



$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{shaft}} + \dot{W}_{\text{pressure}} + \dot{W}_{\text{viscous stress}} = \dot{W}_S + \dot{W}_P + \dot{W}_V$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \text{نرخ کارایی شده توسط شافت (محور)}$$

$$\dot{W}_{\text{pressure}} = \text{نرخ کارایی شده توسط فشار روی سطوح CV} \quad \text{منتهی کننده روی دخیلی}$$

$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{U}$$

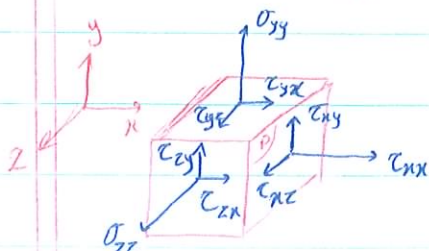
$$d\dot{W}_P = - (p dA) U_{n,in} = p (-\vec{U} \cdot \hat{n}) dA$$

$$\dot{W}_P = \int_{cs} p (\vec{U} \cdot \hat{n}) dA \quad \text{(total pressure work)}$$

$$\dot{W}_V = \text{نرخ کارایی شده توسط تنش (چسبندگی)}$$

$$d\dot{W}_V = \vec{\tau} \cdot \vec{U} dA \quad \tau = \text{stress tensor} \quad \text{*(کاربری از چپ بسبب افزایش انرژی CV می شود)}$$

$$\dot{W}_V = - \int_{cs} \vec{\tau} \cdot \vec{U} dA$$



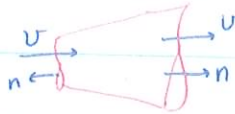
$$P \text{ کار در این امکان} \quad (\sigma_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \text{کار در این امکان}$$

$$\bullet \text{ solid surface} \quad u = v = w = 0 \quad (\vec{U} = 0) \quad \dot{W}_V = 0$$

$$\bullet \text{ surface of machine} \quad \dot{W}_V \rightarrow \dot{W}_S$$

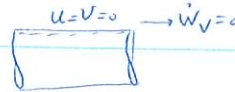
• An inlet or outlet



$$\dot{W}_v = - \int_{cs} \tau_{nn} v_n dA \approx 0$$

$$\tau_{ii} \ll \tau_{ij} \text{ (غلت)}$$

(τ لزجی است نه غیری)



در حالت کلی $\dot{W}_v = - \int_{cs} (\tau \cdot v)_{ss} dA$

همه کلاً $\dot{W} = \dot{W}_s + \int_{cs} P(\vec{v} \cdot \hat{n}) dA - \int_{cs} (\tau \cdot v)_{ss} dA$

در نتیجه داریم

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{cv} e \rho dV \right) + \int_{cs} (e + \frac{P}{\rho}) \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2} v^2 + gz$$

$$\hat{h} = \hat{u} + P/\rho \rightarrow \text{static enthalpy}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} (\hat{u} + \frac{1}{2} v^2 + gz) \rho dV + \int_{cs} (\hat{h} + \frac{1}{2} v^2 + gz) \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

فرم 1 بعدی معادله:

- فرض یکپارچگی بودن خواص در هر سطح ورودی یا خروجی

$$\int_{cs} (\hat{h} + \frac{1}{2} v^2 + gz) \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = \sum (\hat{h} + \frac{1}{2} v^2 + gz)_{out} \dot{m}_{out} - \sum (\hat{h} + \frac{1}{2} v^2 + gz)_{in} \dot{m}_{in}$$

انرژی جنبشی نیاز به یک ضریب اصلاح (α) انرژی باشد (متوسط در هر سطح سطح ورودی و خروجی)

یک ورودی و یک خروجی & داینامیک جریان: فرض

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = -\dot{m}_1 (\hat{h}_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1) + \dot{m}_2 (\hat{h}_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2)$$

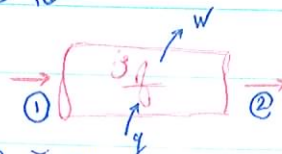
از پیوستگی $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{h}_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1}_{H_1} = \underbrace{\hat{h}_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2}_{H_2} - \underbrace{q}_{\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}} + \underbrace{w_s}_{\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}}} + \underbrace{w_v}_{\frac{\dot{W}_v}{\dot{m}}}$$

q حرارت منتقل شده بر واحد جرم
 w_s, w_v کار انجام شده بر واحد جرم

$$H = \hat{h} + \frac{1}{2} v^2 + gz \rightarrow \text{نام مشخصه می انرژی در آن می باشد}$$

$$\Rightarrow H_1 = H_2 - q + w_s + w_v$$



$\nearrow q^+ \rightarrow H_1 + q = H_2 \quad H_2 \uparrow$ (انرژی آن در (2) افزایش)

$\circlearrowleft w^- \quad H_1 - w_s = H_2 \quad H_2 \downarrow$ (انرژی H_2 کاهش می یابد)

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{\hat{u}_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{\hat{u}_2^2}{2g} + Z_2 + h_f + h_s + h_v$$

$\uparrow$ velocity head
 $\downarrow$ pressure head
 $\downarrow$ friction head
 $\downarrow$ static head
 $\downarrow$ velocity head

Heads Form

جنس غام سرد بالا (ارتفاع) می باشد

* $h_s \rightarrow h_{\text{pump}} \text{ \& } h_{\text{turbine}}$

$H_2 \uparrow \leftarrow$ کار می کشد $(-)$ $H_2 \downarrow \rightarrow$ کار می کند $(+)$

* $h_v \rightarrow h_{\text{loss}}$ (آلافات) $(+)$ همواره

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \rightarrow h_f = h_{\text{loss}}$$

از پی در پی می باشد در غیاب کار شفت و زجت

حالت جریان دینامیک

h_f (از پی در پی می باشد)

کار زجت صفر است در دیوار / کار زجت دینامیک دارد

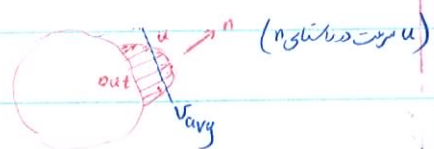
$$\left(\frac{P}{\rho} + \frac{\alpha u^2}{2g} + Z \right)_m = \left(\frac{P}{\rho} + \frac{\alpha u^2}{2g} + Z \right)_n + h_{\text{friction}} - h_{\text{pump}} + h_{\text{turbine}}$$

① ②

Kinetic - energy correction factor

در صورت غیر یکنواخت بودن سرعت در هر سطح مقطع

$$\int_{\text{part}} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \right) dA = \alpha \frac{1}{2} \rho u_{\text{avg}}^2 \dot{m}$$



$$u_{\text{avg}} = \frac{Q}{A} = \frac{\int_{\text{part}} \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{A} = \frac{\int u dA}{A}$$

$$\int_{\text{part}} \frac{1}{2} \rho u^3 dA = \alpha \frac{1}{2} \rho u_{\text{avg}}^2 \dot{m}$$

فرض: جریان تراکم ناپذیر

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{u_{\text{avg}}} \right)^3 dA$$

$$\text{اگر } u = u_{\text{avg}} \rightarrow \alpha = 1$$



مثال: Laminar Flow (جریان آرام)

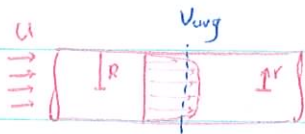
$$u = u_{\text{max}} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$u_{\text{avg}} = u = \frac{\int u dA}{A} = \frac{\int_0^R u_{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r dr}{\pi R^2}$$

$$u_{\text{avg}} = \frac{1}{2} u_{\text{max}}$$



$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{u_{avg}} \right)^3 dA = 2 \quad (\text{برای جریان آرام})$$



$$u_{avg} = \frac{2u_{max}}{(1+m)(2+m)}$$

$$\alpha = \frac{(1+m)^3(2+m)^3}{4(1+3m)(2+3m)}$$

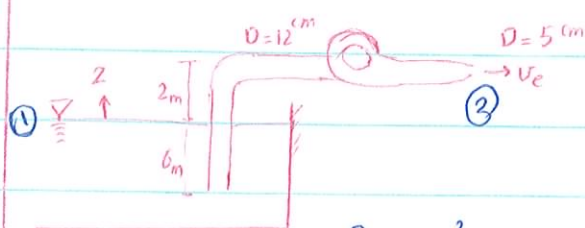
$$\frac{1}{4} < m < \frac{1}{5}$$

$$1.037 < \alpha < 1.109$$

$$\alpha \approx 1.0$$

turbulent flow

$$u_r = u_{max} \left[1 - \frac{r}{R} \right]^m \quad (m = \frac{1}{7})$$



مثال: محلول آب به وسیله پمپ مورد نیاز است

$$h_{loss} = h_f = 5m$$

$$Q = 220 \frac{m^3}{hr}$$

جریان آشفتار است $\alpha \approx 1.0$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_f - h_{pump} + h_{turbine}$$

نقاط ①، ② هر جایی تواند باشند ← جایی در طولی که P, V, Z آن را داشته باشیم

$$P_1 = P_2 = \alpha t m$$

$$V_1 = 0 \quad (\text{مترهاست}) \quad V_2 = V_e$$

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 2m \quad h_f = 5m$$

$$Q = 220 \frac{m^3}{hr} \times \frac{1hr}{3600s} = 0.0611 \frac{m^3}{s}$$

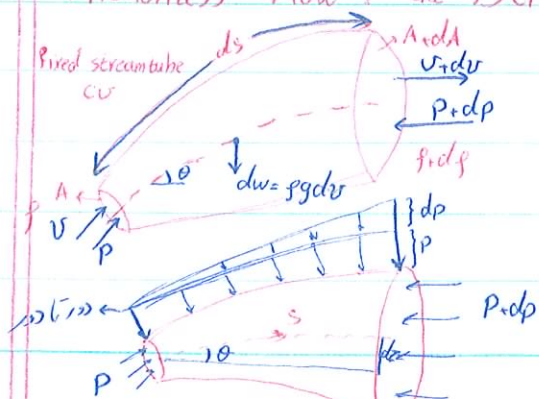
$$Q = A V = A_e V_e \Rightarrow V_e = \frac{4Q}{\pi D_e^2} = 31.125 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + 0 = 0 + \frac{31.125^2}{2g} + 2 + 5 - h_{pump} \Rightarrow h_{pump} = 56.375 m$$

$$\dot{W}_{pump} = \underbrace{g}_{\text{نشان}} \times h_{pump} \times \underbrace{\dot{m}}_{\text{نشان}} = \rho g h_{pump} Q = 33,733 \frac{kg \cdot m^2}{s^3} \left(\frac{N \cdot m}{s} \right) (Watt)$$

نشان $h \times \dot{m} g$

Frictionless Flow, the Bernoulli Eq.



* streamtube حول stream line اگر سرعت کم شود

توبه بیهوشی شود

* در مورد جریان جرمی از سطح لوله جریان $(\dot{m} = 0)$ در سطح

* جریان غیر خروج، غیر اصطکاک است $\tau = 0$

اولی دو یک از سیال ثابت

توان بای جرم: $\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{cv} \rho dv \right) + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + d\dot{m} = 0$
 در راستای خط جریان
 این کوچک

شکل دیگر: $\dot{m} = \rho A v \rightarrow d(\dot{m}) = d(\rho A v) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\frac{\partial \rho}{\partial t} A ds$

توان بای جرم: $\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{cv} \rho v dv \right) + \dot{m} v|_{out} - \dot{m} v|_{in} = \sum F_s$

$\Rightarrow \sum F_s = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) dv + d(\dot{m} v)$

$v = v_s = v_{out}$ در راستای خط جریان

pressure & gravity

$dF_{s, gravity} = -dw \sin \theta = -\gamma A ds \sin \theta = -\gamma A dz$

$dF_{s, pressure} = PA - (P+dp)(A+dA) + (P+\frac{dp}{2})dA \rightarrow$ تصور سطح جانبی بر روی سطح عمود بر S
 $= PA - PA - P dA - A dp - dp dA + P dA + \frac{1}{2} dA dp$
 $= -A dp$

$\sum F_s = -\gamma A dz - A dp = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) A ds + d(\dot{m} v)$

$= \frac{\partial \rho}{\partial t} v A ds + \frac{\partial v}{\partial t} \rho A ds + \dot{m} dv + v d\dot{m}$
 $= v \left(d\dot{m} + \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \rho A ds + \rho A v dv$
 (توان بای جرم)

$-\gamma A dz - A dp = \frac{\partial v}{\partial t} \rho A ds + \rho A v dv$

$\times \frac{1}{\rho A} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + v dv + g dz = 0$

فرضیات: غیر لزج، بی خط جریان

معادله بیرونی برای جریان غیر اصطکاکی غیر دائم بی خط جریان

انتگرال گیری بین دو نقطه از خط جریان: $\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0$



(2) جریان تراکم ناپذیر $\rho = \text{const}$

فرضیات دیگر: 1) جریان دائم $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 = \text{const}$

$\Rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z = \text{const}$ معادله بیرونی

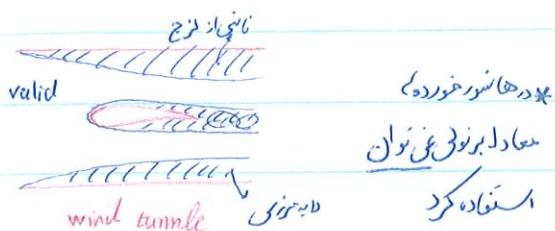
- فرضیات معادله برنولی :
- 1) steady flow
 - 2) frictionless flow (inviscid flow)
 - 3) incompressible flow
 - 4) flow along a streamline

تطابق معادله برنولی با معادله انرژی :

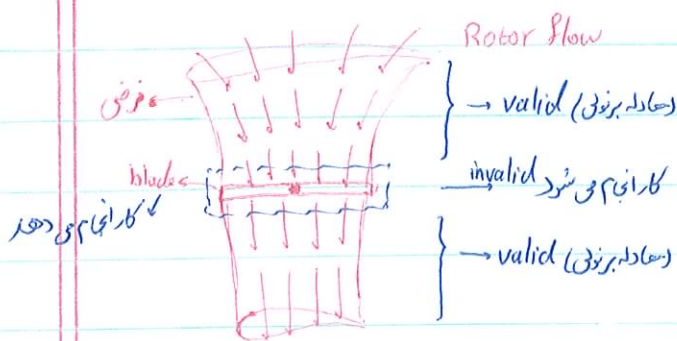
$$\text{معادله انرژی : } \frac{P_1}{\rho} + \frac{\alpha V_1^2}{2} + z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{\alpha V_2^2}{2} + z_2 + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - g) + W_s + W_v$$

فرضیات لازم برای رسیدن به معادله برنولی :

۱. انتقال حرارت صفر
۲. کار شفت برابر با صفر
۳. کار نیروی دایره جفت صفر



مثال در تونل باد



مثال در ماکرودها

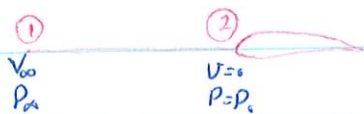
معادله برنولی : $P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{const}$

حالت خاص : $\vec{V} = 0 \rightarrow P + \rho g z = \text{const}$

(میدان سطحی) $P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \rightarrow P_2 - P_1 = \rho g h$

حالت خاص : $z_1 = z_2$

(فشار سکون - stagnation pressure)



(سازگم فشار در P_0) $P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 = P + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_0 + 0$

static pressure $\uparrow$ total (stagnation) pressure $\uparrow$
 $P + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_0$
dynamic pressure

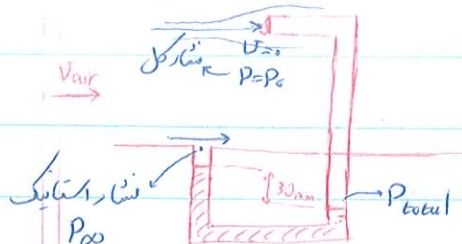
تعریف $C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 - \frac{1}{2} \rho V^2}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = 1 - \frac{V^2}{V_{\infty}^2}$

$C_p|_{\text{نقطه سکون}} = 1 - \frac{0}{V_{\infty}^2} = 1$

$C_p|_{\text{جریان آزاد}} = 0$

Example: pitot tube

برای سنجش سرعت جریان هوا در داخل لوله ساکن



$$P_0 = \frac{1}{2} \rho_{air} V_{\infty}^2 + P_{\infty}$$

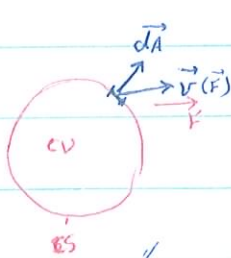
$$\rightarrow V_{\infty} = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\infty})}{\rho_{air}}}$$

$$P_0 - P_{\infty} = \rho_m g h = S C_m \rho_w g h$$

$$\Rightarrow V_{\infty} = \sqrt{\frac{2 S C_m \rho_w g h}{\rho_{air}}} \xrightarrow{\text{عددگذاری}} = 80.8 \frac{m}{s}$$

Differential Relation for a Fluid Particle

Divergence Theorem:



$$d\vec{A} = dA \vec{n}$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_{CV} \nabla \cdot \vec{F} dV$$

رابطه دیورجانی
که عبور از سطح کنترل

تغییرات خاصیت درون
حجم کنترل

continuity رابطه $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV + \iint_S (\rho \vec{V}) \cdot \hat{n} dA = 0$

(fixed CV) جمع ثابت

$$\iiint_{CV} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dV$$

(فانوی دیورجانی)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CV} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dV = 0 \Rightarrow \int_{CV} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0$$

برای همان که یک در نظر می گیریم

* برای هر حجم کنترل دلخواه (همان)

* قابل بیان در هر سیستم مختصات :

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Cartezian Coordinate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

کلن ترین حالت

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

دائم $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \leftarrow$ steady compressible flow: حالت فانی

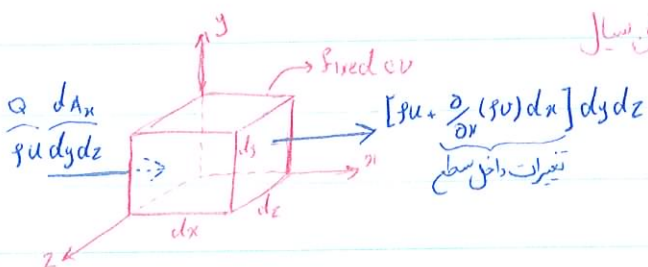
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \leftarrow \rho = \text{const} \leftarrow$ incompressible flow

(هم برای جریان دائم و هم غیردائم است)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1- جهت مشتق
2- بردار سرعت
تغییر



بیان فانوی برای جریان دائم و غیردائم برای همان سیال

* برای سطح های دیگر نیز به طور مشابه است

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i \rho_i V_i A_i \Big|_{out} - \sum_i \rho_i A_i V_i \Big|_{in} = 0$$

جمل عم کو ملے است $\int_{cv} \frac{\partial f}{\partial t} dV = \frac{\partial f}{\partial t} dxdydz$

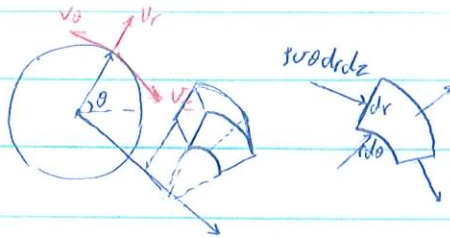
$$f_i A_i V_i|_{out,x} - f_i A_i V_i|_{in,x} = [fu + \frac{\partial(fu)}{\partial x} dx] dydz - fu dydz = \frac{\partial(fu)}{\partial x} dxdydz$$

$$\Rightarrow \sum f_i A_i V_i|_{out} - \sum f_i A_i V_i|_{in} = \frac{\partial(fu)}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial(fv)}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial(fw)}{\partial z} dxdydz$$

دستگاه قانون

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(fu)}{\partial x} + \frac{\partial(fv)}{\partial y} + \frac{\partial(fw)}{\partial z} = 0$$

cylindrical coordinate



$$A = (A_r, A_\theta, A_z)$$

$$\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot f \vec{V} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (f V_\theta) + \frac{\partial f V_z}{\partial z} = 0$$

مثال اگر $u(x,y) = \alpha(x^2 - y^2)$ مطلوب تعیین شود $v(x,y)$ با فرضی که جریان نراکم باشد

$$f = \text{const} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$2\alpha x = 0 + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2\alpha x$$

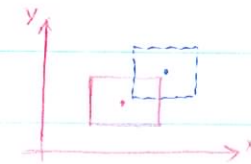
$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} v(x,y) = -2\alpha xy + f(x) \quad (f(x) \text{ می تواند ثابت هم باشد})$$

* به کمک قانون بیوستگی (بقای جرم) ← فیزیکی بودن میدان سرعت داده شده را بررسی می کنیم

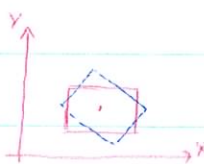
* بعد از بررسی این سرعت معادله همبستگی می دهیم ← فشار را می توان بدست آورد

Motion of a Fluid Particle [Fluid Kinematic]

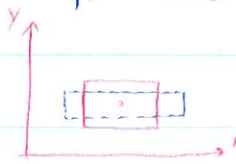
* 4 نوع حرکت داریم: * د د د د



pure translation



pure rotation



pure linear deformation



pure angular deformation

در حالت کلی تغییر شکل مادی المان سیال، ترکیبی از چهار حرکت بالاست

Translation Fluid Particle

- rigid motion $\Rightarrow \vec{V} = \text{const}$

- Acceleration of Fluid particle $\Rightarrow$

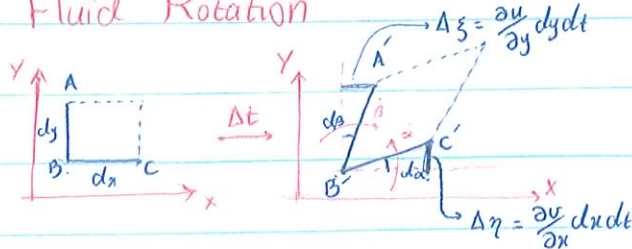
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{local}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}}_{\text{convective}}$$

$\vec{a} \rightarrow u$

$$= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{V}$$

لاگرانژی

Fluid Rotation



متوسط سرعت زاویه‌ای دو خط مجاور هم

AB باعث دوران $\frac{\partial u}{\partial y}$

BC باعث دوران $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$V_{C'} = V_{B'} + \frac{\partial v}{\partial x} dx \rightarrow \Delta V_{C'} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

$$V_{A'} = V_{B'} + \frac{\partial u}{\partial y} dy \rightarrow \Delta V_{A'} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$\Delta \gamma = \Delta V_{C'} \Delta t = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_{BC} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_{BA} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

* (متوسط سرعت زاویه‌ای دو خط مجاور هم) نزدیک

$$\text{Fluid Rotation} = \frac{1}{2} (\omega_{BC} - \omega_{BA}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{BC} = \omega_{BA} \rightarrow \omega_z = 0 \\ \omega_{BC} = -\omega_{BA} \rightarrow \omega_z = \omega \end{array} \right. \quad (\text{rigid body rotation})$$

حالت کلی

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

* تناقض در آیه می‌گوید قطر تسته دو خط را نشان می‌دهد

$$\text{vorticity (چرخش)} \quad \vec{\xi} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

* خاصیت نقطه‌ای است a point property

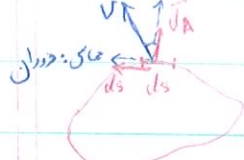
* برای یک جریان غیر چرخشی (irrotational) $\vec{\omega} = \vec{\xi} = 0$ $\nabla \times \vec{V} = 0$ (α=β) نیز در آن است (برای هر نقطه)

* اگر میان غیر چرخش باشد معادله بر روی آن صادق است و اگر چرخش باشد معادله بر روی آن صادق نیست (streamline می‌تواند)

زیر بار مغناطیسی

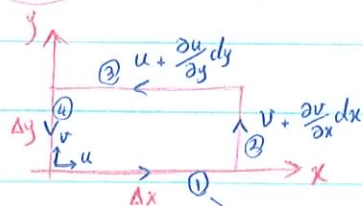
$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

(Γ) Circulation گردش



اشکال خطی سرعت در سطح مورد نظر معروف اشکال چرخش در سطح محصور شده است

و خاصیت نا صیاد ای



برای هر درجه :

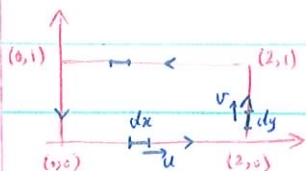
$$\begin{aligned} d\Gamma &= \overset{(1)}{u \Delta x} + \overset{(2)}{v \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta y} \\ &+ \overset{(3)}{(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y)(-\Delta x)} + \overset{(4)}{v(-\Delta y)} \\ &= (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

حت

منتهی به هم وارد می کنند u سبب دوران می کنند

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z dA = \int_A \xi_z dA$$

مثال : مطلوب است تعیین گردش حول مسیر بسته نشان داده شده $\vec{v} = 3xy\hat{i} - 3yx\hat{j}$



$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 (3xy\hat{i} - 3yx\hat{j}) \cdot (\hat{i}dx) \\ &+ \int_0^1 (3xy\hat{i} - 3yx\hat{j}) \cdot (\hat{j}dy) + \int_1^2 (3xy\hat{i} - 3yx\hat{j}) \cdot (-\hat{i}dx) \\ &+ \int_2^0 (3xy\hat{i} - 3yx\hat{j}) \cdot (-\hat{j}dy) \end{aligned}$$

$$= - \int_0^1 3yx^2 dy - \int_0^2 3xy dx = - \int_0^1 6y dy - \int_0^2 3x dx = -3y^2 \Big|_0^1 - \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^2 = -9$$

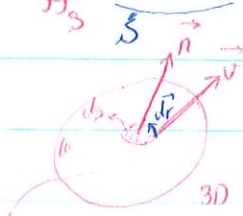
2 به :

$$\xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -3y - 3x = -3(x+y)$$

$$\iint_A \xi_z dA = \iint_A -3(x+y) dx dy = - \int_0^2 dx \int_0^1 3y dy - \int_0^1 dy \int_0^2 3x dx = \dots = -9$$

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

: STOKES Theorem



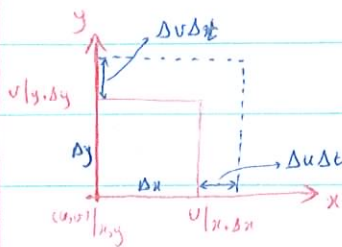
چرخش در سطحی n سبب درونی می شود $\xi \cdot n$

خلاصه $\Rightarrow \iint_S \xi_n dS = \Gamma$

المان سطح

Fluid Deformation

1) Linear Deformation



هدف: نرخ افزایش حجم در واحد حجم

$$\Delta V = \text{افزایش حجم برای بازه زمانی } \Delta t$$

$$= (\Delta u \Delta t) \Delta y \Delta z + (\Delta v \Delta t) \Delta x \Delta z + (\Delta w \Delta t) \Delta x \Delta y$$

$$\Delta u = u|_{x+\Delta x} - u|_x = (u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x) - u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \quad (du = \frac{\partial u}{\partial x} dx)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \quad \Delta w = \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta V = (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{V \Delta t} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

تعبیر حجم المان سیال در جریان

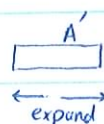
* شیب، در جریان تراکم ناپذیر ← حجم المان سیال تغییر نمی کند

$$(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ (جریان تراکم ناپذیر)})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \Rightarrow \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = 0 \Rightarrow \text{حجم المان ثابت}$$

2D flow
incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

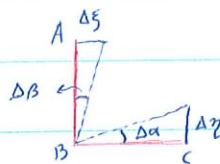
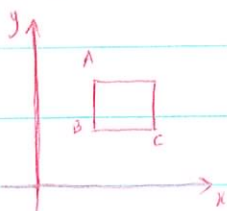


contraction
expand

* فلوئید برای سطح
 $A = A'$

* در حالت پس اولیه (ناستور) مجموع تغییرات دایره ای فلوئید در ن دهنده Dilatation دایره ای در ده

2) Angular Deformation



$$\frac{d\alpha}{dt} = \lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \dots = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

کوین برشی
نرخ تغییر شکل زاویه ای

Newton Law

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu \epsilon_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\mu \epsilon_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 2\mu \epsilon_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

فشار ناستورسیس

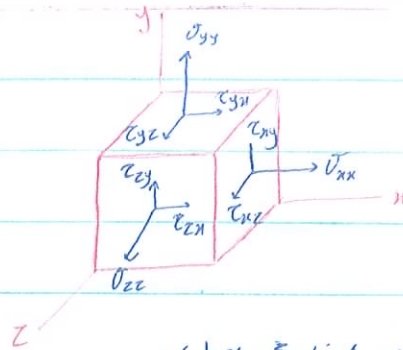
ضریب ویسکوزیته
(نرخ کرنش) $\tau = \mu \dot{\epsilon}$

تایید معادلات ناویه-استوکس

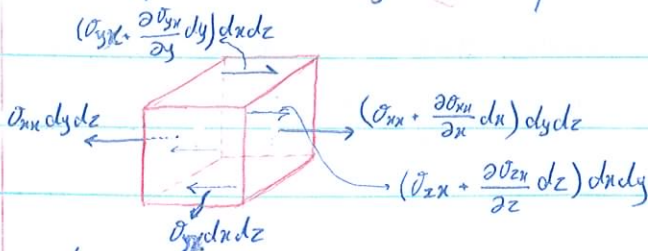
$$\sigma_{ii} = 0 + 0$$

Navier - Stokes Eq.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



برای اتمام درستی خود را داریم:



$$\begin{aligned} dF_{s,x} &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy \right) \\ &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz / dv \\ (\sigma_{xx} &= -P + \tau_{xx} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dF_{s,x}}{dv} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{dF_{s,y}}{dv} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{dF_{s,z}}{dv} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dF_{gravity} &= \rho g \, dx dy dz \Rightarrow \frac{d\vec{F}_g}{dv} = \rho \vec{g} \\ \Rightarrow \frac{\sum \vec{F}}{dv} &= \frac{d\vec{F}_g}{dv} + \frac{d\vec{F}_s}{dv} \Rightarrow \rho \vec{a} = \rho \vec{g} + \left(\frac{d\vec{F}_s}{dv} \right) \end{aligned}$$

x-momentum

$$\rho \vec{a}_x = \rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (*)$$

برای جهت های دیگر نیز به طور مشابه

Normal Stress

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\end{aligned}$$

$\mu \rightarrow$ dynamic viscosity
 $\lambda \rightarrow$ bulk viscosity (volume)

mechanical pressure $\rightarrow$ فشار مکانیک

$$\bar{P} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \xrightarrow{\sigma_{ii} = -P + \tau_{ii}} = P - (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

شرط تراکم ناپذیری: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$
رضیه Stokes: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

$\bar{P} = P$ برای جریان تراکم ناپذیر یا ناپذیر

Navier-Stokes Eq. for Incompressible Flow

معادله x-momentum :

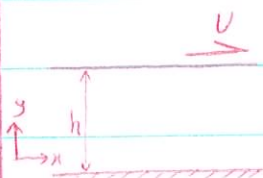
$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})) \\ &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\underbrace{\mu \frac{\partial u}{\partial x}}_{\nabla^2 u}) + \frac{\partial}{\partial x} (\underbrace{\mu \frac{\partial v}{\partial y}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0}) + \frac{\partial}{\partial x} (\underbrace{\mu \frac{\partial w}{\partial z}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0})\end{aligned}$$

جمع این ها $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

$$\begin{aligned}x \Rightarrow \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ y \Rightarrow \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho (\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ z \Rightarrow \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho (\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w\end{aligned}$$

* متغیرات ρ, μ, ν, u است

مثال: جریان تراکم ناپذیر حبابی در صند. - صند بالایی متحرک (صند بالایی)



$$V_{\text{bottom}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{بسیار مهم}$$

$$\begin{aligned}\rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \rho (\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) &= \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})\end{aligned}$$

جریان پایا $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

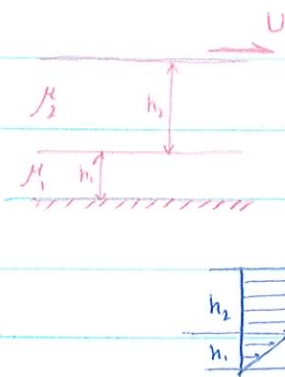
جریان حبابی $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ (صند بالایی)

جریان متحرک ناشی از صند بالایی $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ (اگر لایه باشد، جریان دارد و در صورت مخالف صفر است)

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad u(y) = C_1 + C_2 y$$

(خطی) $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(h) = U \end{cases} \rightarrow u(y) = \frac{U}{h} y$

$$\Rightarrow f(-y) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\rho g \quad (\text{رابطه هیدروستاتیکی})$$



$$u_2(y) = C_1 + C_2 y$$

$$u_1(y) = C_3 + C_4 y$$

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_2(h_1 + h_2) = U \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(h_1) = u_2(h_1) \\ \mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=h_1} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=h_1} \end{cases}$$

تنش بالایی = تنش پائینی ← چون این شتاب ندارد

مثال: در صدمه سواری بی نهایت / صدمه بالایی حرکت می کند

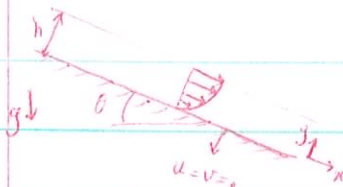
۴ جمله شرط:

مثال جریان در یک سطح نسبت دار ناهم ازگراس (مادگان شکل در نظر بگیرید) مطلوب میدان سرعت و فشار

* فرض: میدان سرعت ← موازی (h ثابت است) ← $\frac{\partial u}{\partial x}$ حوازی

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{بستگی هم}$$



$$2D\text{-flow: } ① \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{بستگی هم}$$

$$② \rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$③ \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

عبادت ای غیر خطی

* فرض جریان توسعه یافته (جریان حوازی) در یک خط سرعت نقاط با هم برابر است $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(y) = \text{const}$

* در جریان ای حوازی (در استاتی) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(y) = 0 \quad \text{شکل اول در دم آل منرا}$$

* فرض جریان دائم: در یک نقطه سرعت نقاط مجاور نسبت به زمان تغییر نمی کند $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

* سمت چپ ناری = 0 ← شتاب نداریم

$$* g = (g_x, g_y) = (g \sin \theta, -g \cos \theta)$$

* در استاتی x ← وجود جریان ناهم ازگراس است (موسوم اولیه سیال نبود) $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$③ \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dp}{dy} = \rho g_y = -\rho g \cos \theta$$

$$② \rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho g_x = -\rho g \sin \theta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + C_1$$

(در استاتی)

$$u(y) = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

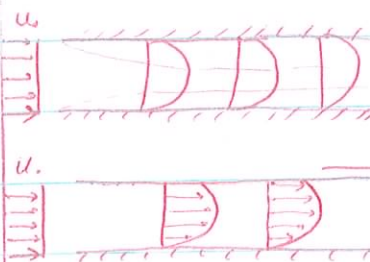
* شرط ای اولیه

$$\begin{cases} u(y=0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(y=h) = 0 \end{cases}$$

h ← ماکزیمم سرعت را داریم

* برای یافتن دبی جرم:

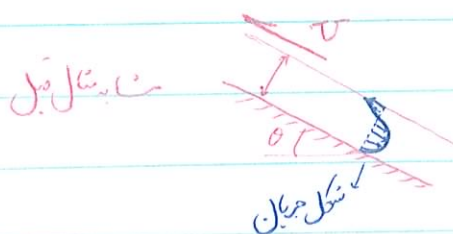
$$Q = \int_0^h u dy = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} \int_0^h y(2h-y) dy$$



صفحه ثابت $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$

جریان در صفحه یا نه (بروزی است یا نه)

صفحه بالا در حرکت $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$



$$u(y) = \frac{-\rho g \sin \theta}{2\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$\begin{cases} u(y=0) = 0 \\ u(y=h) = V \end{cases}$$

شرط مرزی (ثابت)

x به ازای چه عددی از V دبی جریان برابر صفر خواهد بود؟

$$Q = \int_0^h u dy = 0$$

Incompressible Inviscid Flow

جریان غیر لزج تراکم ناپذیر

Ideal flow

- Incompressible $\rightarrow \rho = \text{const}$
- Inviscid $\rightarrow \mu = 0$

معادله $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v}$

Euler Eq.

vector identity

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

(چرخش) $\vec{\omega}$

رابطه برنولی را برای هر دو نقطه می توان نوشت:

$$\frac{1}{\rho} (\text{Euler Eq.}) \cdot d\vec{r}$$

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \vec{\xi} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \cdot d\vec{r} + (\vec{\xi} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} + \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r} - \vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$$

در این $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{1}{\rho} dp$$

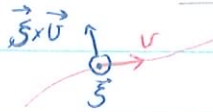
$$\vec{g} \cdot d\vec{r} = -g \hat{k} \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = -g dz$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \cdot d\vec{r} = d \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (\text{مثل ادبی})$$

$$(\vec{\xi} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \text{برای این باید صفر باشد}$$

$$(\vec{\xi} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- 1) $\vec{\xi} = \nabla \times \vec{v} = 0$ (Irrotational Flow) $\rightarrow$ انگرادیسی هر خط جریان
- 2) $d\vec{r} \parallel \vec{v}$ (along a Streamline) $\rightarrow$ (عکس Vorticity داشته باشیم) $\rightarrow d\vec{r}$



$$\vec{\xi} \times \vec{v} \perp d\vec{r} \rightarrow \text{ضرب داخلی صفر است}$$

$\rightarrow$ انگرادیسی روی خط جریان

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0$$

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0$$

طول کمان روی خط جریان

فرض: steady & incompressible $\rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \text{const}$ (along streamline)

* اگر جریان غیر چرخان باشد مقدار const در جانب است

Irrotational $\rightarrow C_1 = C_2$ (در کل میدان C ثابت است)

(سطح انرژی در هر جانب است)



Stream Function (for 2D incompressible flow)

توانی برکتگی $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

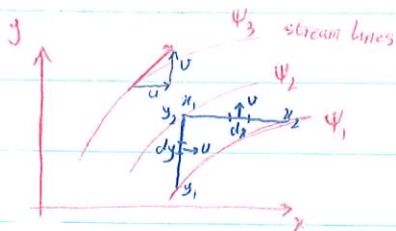
ψ : Stream Function

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(جریان تراکم پذیر در بیسی)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \psi_{xy} - \psi_{yx} = 0$$

در حالت بی برکتگی صحت می کند



برای خط جریان

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \rightarrow u dy - v dx = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = \text{const}$$

* مقدار ψ روی هر خط جریان یکسان است (مقدار ثابت دارد)

$$\begin{cases} Q_y = \int u dy \\ Q_x = \int v dx \end{cases}$$

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \psi|_{y_1}^{y_2} = \psi_2 - \psi_1$$

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} v dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\psi|_{x_1}^{x_2} = \psi_2 - \psi_1$$

(2) تفاوت دبی بین هر دو خط جریان

* بین هر دو خط جریان، دبی = اختلاف تابع جریان آن دو خط جریان



$$Q = \int \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \psi_A - \psi_B$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \end{cases} \quad \text{unknown: } \{u, v, p\}$$

حل معادلات بالا به روشی است، دنبال معادلات راحت تر هستیم

Vorticity - stream function (2D incompressible)

$$\xi = \nabla_x \vec{V} \rightarrow \xi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \xi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \rightarrow \xi = -\nabla^2 \psi$$

مثال، $\vec{V} = (x^2 - y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ جریان بی‌سرعت

(a) $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2x = 0 \rightarrow$ جریان تراکم ناپذیر است / نیزگی بدون مبدأ سرعت

(b) $\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 - y^2 \rightarrow \psi = x^2 y - \frac{y^3}{3} + f(x) \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2xy \rightarrow \psi = x^2 y + f(y) \end{cases}$

از رابطه اول مشتق می‌گیریم: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2xy + f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = \text{const}$
 از رابطه دوم مشتق می‌گیریم: $\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 + f'(y) \Rightarrow f'(y) = -y^2 \rightarrow f(y) = -\frac{y^3}{3} + \text{const}$
 $\Rightarrow \psi(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + \text{cte}$

(c) $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - (-2y) = 0$ یا $\xi = -\nabla^2 \psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 2y - 2y = 0$

← اتمل چرخش ندارد

$\alpha = \beta$ تغییر شکلی که اما مرکز جرم ثابت است، چرخش ندارد

(d) $\Gamma = \oint_A \xi \, dA = \oint_{\partial A} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow$ دهمیرد لحاظ circulation ضرایب

Irrotational Flow

$\nabla^2 \psi = 0$ چرخش ندارد
 در دینامیک 2 بعدی، دایره داریم

$$\xi = 0 \xrightarrow{2D} -\xi = \nabla^2 \psi \rightarrow \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

معادله لابلاس برای ψ

$$\vec{\xi} = \nabla_x \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{V} = \nabla \phi \rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

جریان 2 بعدی یا 3 بعدی

مانند تابع پتانسیل (گرادیان آن جهت سرعت است)

ψ فقط 2 بعدی
 ϕ می‌تواند 3 بعدی هم باشد

$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = 0 \rightarrow \nabla^2 \phi = 0$ (لابلاس برای ϕ)

if 2D $\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{incompressible / irrotational}$

* اگر جریان تراکم ناپذیر و غیر چرخان باشد، پتانسیل ϕ و پتانسیل سرعت ψ می‌تواند به کمک معادله برنولی و پتانسیل فشار و پایداری آریسم پیدا شود.

unknown $\{u, v, p\}$
 $\phi(x, y) \rightarrow \begin{cases} u(x, y) \\ \psi(x, y) \end{cases}$
 $\psi(x, y) \rightarrow \begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases}$

رابطه ϕ, ψ

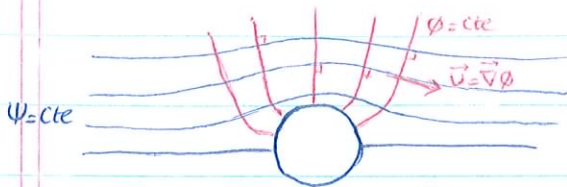
$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$ (خطوط جریان $\phi = \text{cte}$)

$\frac{dy}{dx} \Big|_{\phi=\text{cte}} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{v}{u}$ (I)

$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$ (خطوط پتانسیل $\psi = \text{cte}$)

$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=\text{cte}} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = - \frac{u}{v}$ (II)

(I), (II) $\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=\text{cte}} \times \frac{dy}{dx} \Big|_{\phi=\text{cte}} = -1 \rightarrow$ خطوط ψ و ϕ بر سطوح ϕ و ψ عمود است.



in polar coordinates

معادله برنولی در مختصات قطبی

$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) = 0$

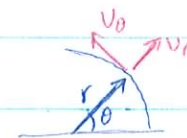
$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(- \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0$

$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta$

$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases}$

در این صورت که معادله برنولی را ارضاء می‌کند

میدان سرعت
میدان فشار



Superposition of Flows

برای دو یا چند جریان داده شده با توابع جریان و توابع پتانسیل مربوط

$$\begin{cases} \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n \\ \text{or} \\ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n \end{cases}$$

اگر روابط جریان غیر چرخشی و توابع پتانسیل صاف باشند یعنی $\nabla^2 \phi_i = 0$ or $\nabla^2 \psi_i = 0$ آنگاه تابع پتانسیل مجموع و یا تابع جریان مجموع نیز شرط غیر چرخشی و توابع پتانسیل بردن را ارضای کند و جمع آثار آن برای

میدان سرعت: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_i + \dots + \vec{V}_n$

$$\begin{cases} u = u_1 + u_2 + \dots + u_i + \dots + u_n \\ v = v_1 + v_2 + \dots + v_i + \dots + v_n \end{cases}$$

برقرار است $\nabla^2 \psi$ یا $\nabla^2 \phi$ خطی است

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g h = \text{const}$$

* اصل جمع آثار برای میدان فشار صادق نیست

معادله برنولی غیر خطی است برای سرعت

راهنما u, v را جداگانه حساب می کنیم (جمع می زنیم) $V^2 = u^2 + v^2$ در معادله برنولی P می دهد

Elementary Plane Flows

- 1) uniform flow یکدخت
- 2) source/sink جاذب/چشمه
- 3) vortex گردآیه
- 4) doublet دو قطبی (نزدج)

① uniform flow



مقدار سرعت U_∞ ثابت تحت زاویه α نسبت به محور x

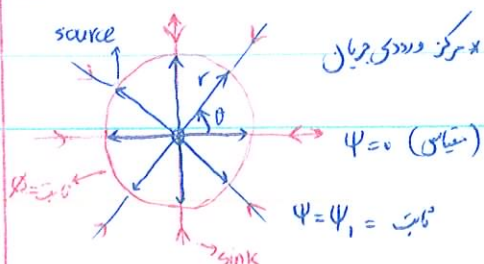
$$\begin{cases} \psi = (U_\infty \cos \alpha) y - (U_\infty \sin \alpha) x \\ \phi = (U_\infty \sin \alpha) y + (U_\infty \cos \alpha) x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = U_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = U_\infty \sin \alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

غیر چرخان $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$

حالت خاص $\alpha = 0 \Rightarrow \psi = U_\infty y \quad \phi = U_\infty x$

② source/sink flow



$$\psi = m\theta = \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$\phi = m \ln r = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

غیر چرخان $(\nabla^2 \psi, \nabla^2 \phi)$ را ارضای کند

$$\begin{aligned} q &= \frac{Q}{b} \quad \text{در واحد عرضی} \\ m &= \frac{q}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi b} \end{aligned}$$

نرخ جریان جوی

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

* از ϕ استفاده کنیم تا آنرا است

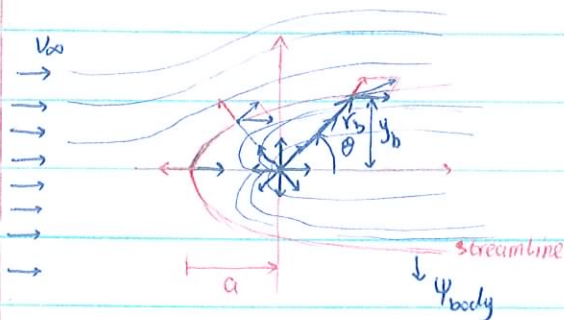
نرخ جریان جغی بر واحد عرض $\int v_r dA = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r} \times r d\theta = \frac{q}{2\pi} \times 2\pi = q$

باشن دبی جغی $m = \frac{q}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi b}$

$+ q > 0$ source
 $- q < 0$ sink

* جریان از مرکز در شعاع r حرکت آن کمتر است

source in uniform flow



$$\psi_u = V_\infty y$$

$$\psi_s = \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$\rightarrow \psi_{total} = \psi_u + \psi_s$$

$$\Rightarrow \psi_{total} = V_\infty y + \frac{q}{2\pi} \theta$$

$\downarrow$
 $r \sin \theta$

نقطه سکون (stagnation point)

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left(r V_\infty \cos \theta + \frac{q}{2\pi} \right) = V_\infty \cos \theta + \frac{q}{2\pi r} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_\infty \sin \theta \end{cases}$$

برای نقطه سکون $v_\theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \pi$

$v_r|_{\theta=0} \neq 0, \quad v_r|_{\theta=\pi} = 0 = -V_\infty + \frac{q}{2\pi r} \Rightarrow r = a = \frac{q}{2\pi V_\infty}$

$$\psi = V_\infty r \sin \theta + \frac{q}{2\pi} \theta \Big|_{(a, \pi)} = 0 + \frac{q}{2\pi} \times \pi = \frac{q}{2}$$

مقدار ψ نقطه سکون

معادله خط جریان عبوری از نقطه سکون $\rightarrow \psi_{body} = V_\infty r \sin \theta + \frac{q}{2\pi} \theta = \frac{q}{2} = \psi_{stag}$

$$\Rightarrow r_b \sin \theta + \frac{q}{2V_\infty} \frac{\theta}{\pi} = \frac{q}{2V_\infty}$$

$$\rightarrow h = \frac{q}{2V_\infty} \rightarrow r_b \sin \theta + h \frac{\theta}{\pi} = h$$

$$y_b + h \frac{\theta}{\pi} = h$$

$$y_b = h \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right)$$

$\theta = 0 \rightarrow h$ (دبی)

$$r_b \sin \theta = \frac{q}{2V_\infty} \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right)$$

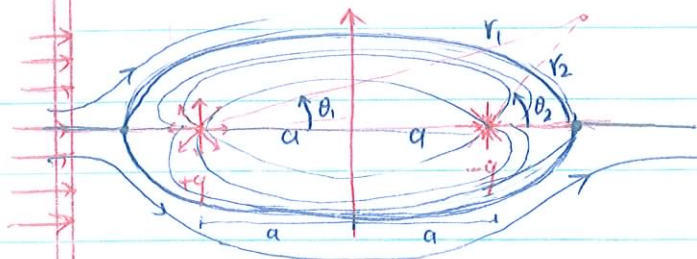
$$\rightarrow r_b = \frac{q}{2\pi V_\infty} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}$$

m

Flow about a Rankine Body

uniform flow + source + sink

$$\psi = V_{\infty} y + \frac{q}{2\pi} \theta_1 - \frac{q}{2\pi} \theta_2 = V_{\infty} y + \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

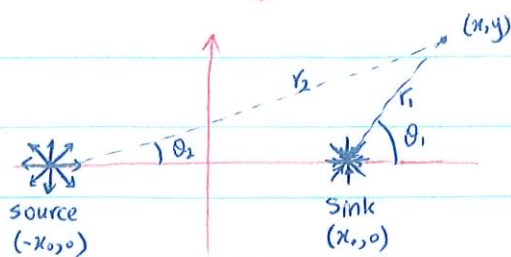


$$\begin{cases} \theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \\ \theta_2 = \tan^{-1} \frac{y}{x-a} \end{cases}$$

رابطه اضافی $\tan^{-1} \alpha - \tan^{-1} \beta = \tan^{-1} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$

$$\Rightarrow \psi = V_{\infty} y + \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \sim \psi(x, y) \rightarrow \text{پتانسیل دایره}$$

③ doublet (چرخ)



$$\begin{aligned} \psi &= \frac{q}{2\pi} \theta_2 - \frac{q}{2\pi} \theta_1 \\ &= -\frac{q}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y}{x-x_0} - \tan^{-1} \frac{y}{x+x_0} \right) \\ &= -\frac{q}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left[\frac{\frac{y}{x-x_0} - \frac{y}{x+x_0}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - x_0^2}} \right] \right] \end{aligned}$$

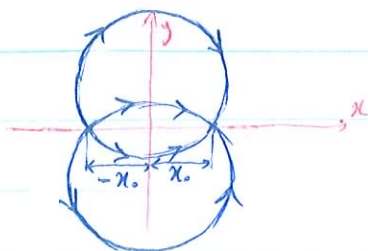
$$\Rightarrow \psi = -\frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2x_0 y}{x^2 + y^2 - x_0^2}$$

$$\tan^{-1} \rightarrow -\tan \left(\frac{2\pi \psi}{q} \right) = \frac{2x_0 y}{x^2 + y^2 - x_0^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x_0 y \cot \frac{2\pi \psi}{q} = x_0^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + x_0 \cot \frac{2\pi \psi}{q} \right)^2 = x_0^2 + x_0^2 \cot^2 \left(\frac{2\pi \psi}{q} \right)$$

$x=0$ y_0 R^2

به شعاع R معادله دایره
روی محور y



به ازای ψ های مختلف

$$q \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lambda = 2x_0 q \rightarrow \text{cte}, \quad x_0 \rightarrow 0$$

حال فرض کنید

$$\rightarrow \psi = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\lambda}{4\pi x_0} \tan^{-1} \frac{2x_0 y}{x^2 + y^2 - x_0^2} \right\}$$

$$= \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{-\lambda}{4\pi x_0} \times \frac{2x_0 y}{x^2 + y^2 - x_0^2} = \frac{-\lambda}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{-\lambda}{2\pi} \times \frac{r \sin \theta}{r^2}$$

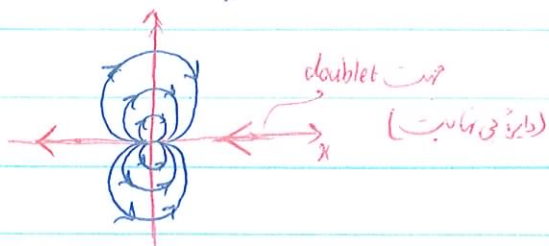
$$\Rightarrow \psi = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (\text{doublet})$$

حل اینت می کنیم که دایره است

$$x^2 + y^2 + 2x_0 y \cot \frac{2\pi \psi}{\lambda} = x_0^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x_0 y \times \frac{1}{\frac{\lambda \tan \frac{2\pi \psi}{\lambda}}{y}} = x_0^2$$

$$q \rightarrow \infty \leftarrow 2x_0 y = \lambda = \text{cte}, x_0 \rightarrow 0 \quad \text{فرض}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{\lambda y}{2\pi \psi} = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{\lambda}{4\pi \psi}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{4\pi \psi}\right)^2$$



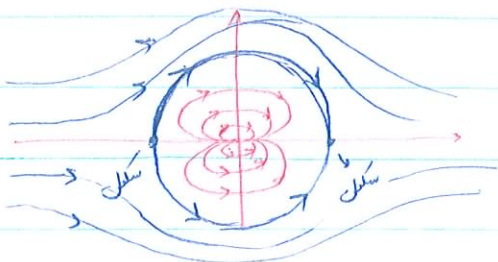
Flow past a circular cylinder

$$\psi_1 = V_{\infty} y \quad \text{جریان یکنواخت} \quad \psi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (\lambda = 2x_0 q = \text{const})$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = V_{\infty} y - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = V_{\infty} y - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{y}{r^2} = V_{\infty} y \left(1 - \frac{\lambda}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{r^2}\right) = V_{\infty} y \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$a^2 = \frac{\lambda}{2\pi V_{\infty}} \quad \text{که ثابت}$

$$\Rightarrow \psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sim \psi(r, \theta)$$



$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\phi = V_{\infty} r \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\psi = \psi|_{\text{stagnation}} = \psi_{\text{body}} = V_{\infty} y \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = 0 \rightarrow r = a \quad \text{دایره ای به شعاع } a$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta$$

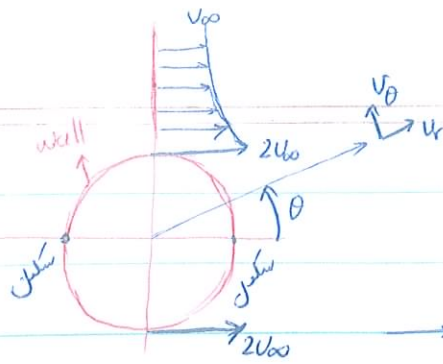
$$V_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta$$

روی دایره
 $r = a$

$$V_r = 0$$

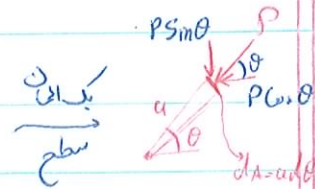
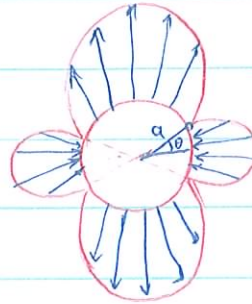
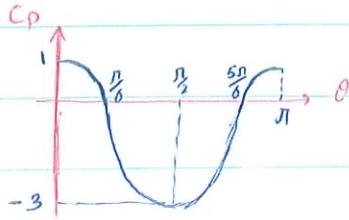
$$V_{\theta} = -2V_{\infty} \sin \theta$$

$$\theta = 0, \pi \rightarrow V_{\theta} = 0 \quad (\text{نقطه سکین})$$



$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho V^2}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

$$C_p|_{\text{wall}} = 1 - \frac{V^2 + (-2V_\infty \sin \theta)^2}{V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$



$$F_x = \text{Drag} = - \int P \cos \theta dA = - \alpha \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta$$

$$F_y = \text{Lift} = - \int P \sin \theta dA = - \alpha \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta$$

$$\left(\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \right)$$

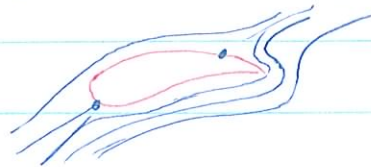
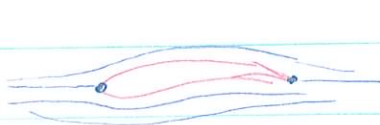
$$P = P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - 2 \rho V_\infty^2 \sin^2 \theta$$

$$D = - \alpha (P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 2 \rho V_\infty^2 \alpha \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0$$

$$L = - \alpha (P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2) \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + 2 \rho V_\infty^2 \alpha \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\text{Force} = 0$$

* جریان تراکم ناپذیر / غیر چرخان ← لزجت نداشته باشیم، موشنم نمی گیرد، $D, L = 0$



مثال

4) Vortex Flow



$$\psi = K \ln r = - \frac{k}{2\pi} \ln r$$

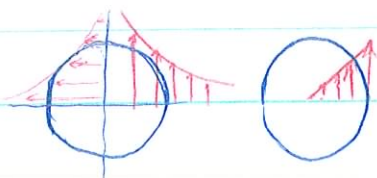
$$\phi = K \theta = \frac{k}{2\pi} \theta$$

K = strength of vortex

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ V_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \times \frac{1}{r} = \frac{k}{2\pi r} \end{cases}$$

* این جریان با حرکت یک دیسک متفاوت است

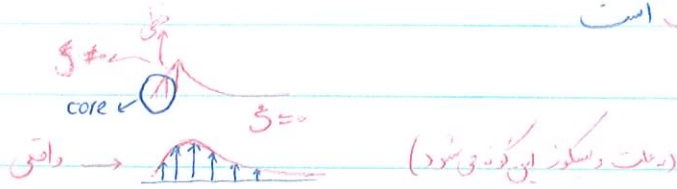
$$[V_\theta = \frac{k}{2\pi r} \text{ یعنی در گدازه } V_\theta = r\Omega]$$



یک در جریان گردآید، چرخش ندارد فقط تغییر شکل زاویه ای دارد اما در دایک درانی چرخش همان داریم

سرعت در مرکز vortex ایده آل بی نهایت است

در vortex حقیقی، در مرکز هسته ای داریم:

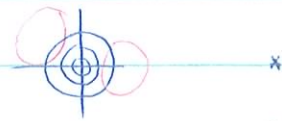


$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{k}{2\pi r} r d\theta = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = k$$

$$\begin{cases} k = \Gamma \\ k = \frac{\Gamma}{2\pi} \end{cases}$$

circulation آن صفر ← 0

* هرنا صیابی در مرکز را می بیند ← vorticity دارد ← circulation آن ≠ 0



Dimensional Analysis & Similarity

5

آمار ابعادی: روش کاهش تعداد پیچیدگی متغیرهای آزمایشگاهی که یک پدیده فیزیکی را تحت تأثیر قرار می دهد و بیان متغیرها بصورت فشرده (یا ابعادی بی بعد)

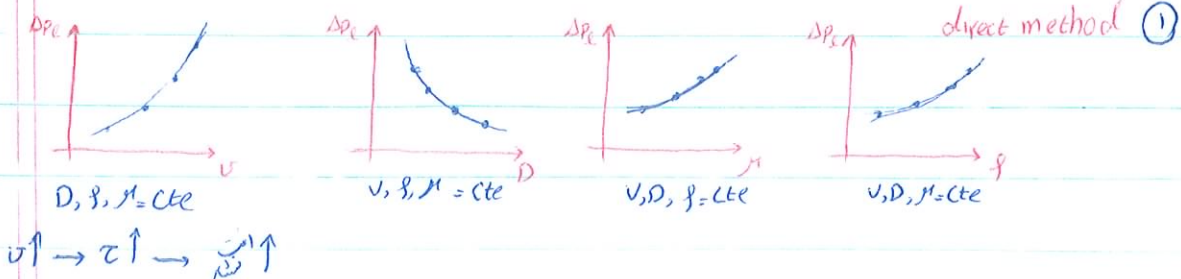
کاربرد: مطالعه مدل بجای نمونه اصلی (prototype)

- کاهش تعداد تست های آزمایشگاهی

Example: pressure drop in a pipe ($\frac{\Delta P}{\Delta x}$ or $\frac{dp}{dx}$)

تجربه: $\Delta P_L = f(D, \rho, \mu, v)$
 (ذری سطح) ΔP_L : افت فشار بر واحد طول
 D : قطر لوله
 ρ : چگالی سیال
 μ : ویسکوزیته سیال
 v : سرعت متوسط

یافتن تابع:

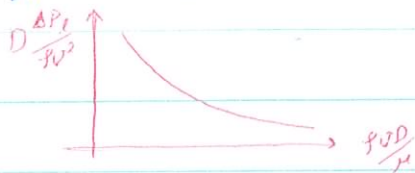


مسئله: زیاد بودن تعداد آزمایشات

عدم دسترسی به یک فرم تابع عمومی

در دو سوی بعدی

$$D \frac{\Delta P_e}{\rho U^2} = g \left(\frac{\rho U D}{\mu} \right)$$



با رابطة تجربی هم
(باید بی بعدی را در نظر بگیریم)
(گروه بی بعدی)

(2) روش آنالیز ابعادی

system	ΔP_e	D	ρ	μ	U	
$\begin{cases} MLT\theta \\ FLT\theta \end{cases}$	FL^{-3}	L	$FL^{-4}T^2$	$FL^{-2}T$	LT^{-1}	$\rightarrow FLT\theta$
	$ML^{-2}T^{-2}$	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-1}	$\rightarrow MLT\theta$

$$\Pi_1 = \frac{D \Delta P_e}{\rho U^2} = \frac{[L][FLT^{-3}]}{[FL^{-4}T^2][LT^{-1}]^2} = F^0 L^0 T^0 = 1$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho U D}{\mu} = \dots = 1$$

Buckingham Pi Theorem (1914)

n پارامتر - $n-1$ پارامتر وابسته

$$v_1 = f(v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$k = n - j$ ← تعداد گروه‌های بی بعد
number of dimensions

- برای n پارامتر تعداد $n-j$ گروه بی بعد وجود دارد

example $\Delta P_e = f(\rho, U, D, \mu)$ $n=5$ $j=3$ $k=2 \rightarrow$ 2 گروه بی بعد داریم Π_1, Π_2

از $MLT\theta, FLT\theta$ چند تا استفاده شد؟
 $\{F, L, T\}$
 $\{M, L, T\}$
یا هر کدام کمتر باشد آن دست است

- فرم تابع f توسط آزمایش تعیین می شود

مثال $\Pi_3 = \frac{2 \Pi_1}{\Pi_2} \times$
 $\Pi_3 = \Pi_1^2 \Pi_2^{-3}$

- هر ترکیب دلخواه از گروه‌های بی بعد، یک گروه بی بعد مستقل نخواهد بود

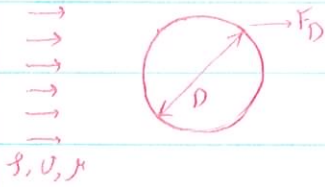
← گاهی نیاز است گروه‌ها را ترکیب کنیم تا گروه بی بعد معروف حاصل شود

* انتخاب سه متغیر که تشکیل یک گروه بی بعد می دهند (v_1, v_2, v_3)

- پس: $\Pi_1 = (v_1)^a (v_2)^b (v_3)^c v_4 = MLT^{-2}$
 $\Pi_2 = (v_1)^a (v_2)^b (v_3)^c v_5 = MLT^{-2}$
 $\leftarrow c, b, a$ بدست می آید

(Π_2, Π_1) مستقل

Example : Drag Force on a Smooth Cylinder



$$\textcircled{1} \quad Y_D = f(p, U, \mu, D)$$

$$n = 5$$

② dimension of variables :

	F	g	U	D	M
$MLT\theta \rightarrow$	MLT^{-3}	ML^{-3}	LT^{-1}	L	$ML^{-1}T^{-1}$
$FLT\theta \rightarrow$					

$\rightarrow j \ll 3 \Rightarrow j=3$

③ اشخاب 3 تنغیرکے تشکیل کردہ بی بعدی دھند (2 کردہ بی بعدی دھند)

مسئلہ: f, v, D (ہوسٹنڈا)

④ $\Pi_1 = D^a V^b f^c F = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [MLT^{-2}] = M^0 L^0 T^0$

$$\begin{cases} a+b-3c+1=0 \\ c+1=0 \\ -b-2=0 \end{cases} \rightarrow \pi_1 = D^{-2} V^{-2} f^{-1} F = \frac{F}{f v^2 D^2}$$

$$\pi_2 = D^a v^b g^c \mu = [L]^a [L T^{-1}]^b [M L^{-3}]^c [M L^{-1} T^{-1}] = M^0 L^0 T^0$$

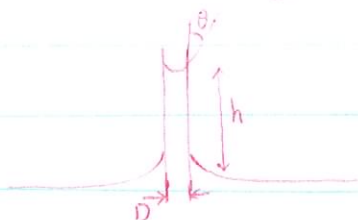
$$\begin{cases} a+b-3c-1=0 \\ -b-1=0 \\ c+1=0 \end{cases} \rightarrow \pi_2 = D^{-1} U^{-1} f^{-1} \mu = \frac{\mu}{f \cup D}$$

(5) $\pi_2^{-1} = \frac{\rho v D}{\mu} = Re$ *Reynold's*

$$(6) \quad \frac{F}{\rho v D^2} = g \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right)$$

$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = f \left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{v}{c} \right)$

Example : Capillary Rise



$$h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{R}$$

کام اول $h = f(D, \gamma, \gamma) \quad n=4$

کام دوم

h	D	γ	γ
{L}	{L}	{ML ⁻² T ⁻² }	{MT ⁻² }

h	D	γ	γ
{L}	{L}	{FL ⁻³ }	{FL ⁻¹ }

از این معادله استاندارد می کنیم $j=2$ $\Rightarrow$ $j=3$
 می توان به تغییر متغیر انتخاب کرد که تشکیل داده بی بعد ندهند (هر یک متغیر تشکیل گرفته با بعدی دهد) $\Rightarrow$ راه دیگر

	h	D	γ	γ
M	0	0	1	1
L	1	1	-2	0
T	0	0	-2	-2

	h	D	γ	γ
F	0	0	1	1
L	1	1	-3	-1

$\sim \rightarrow \text{rank} = 2 = j$

در ماتریس سمت چپ هیچ ماتریس 3×3 می توان یافت که درمیان آن صفر نشود $\leftarrow j \neq 3$
 که در اکثر در تغییر می توان انتخاب کرد (ماتریس 2×2 درمیان مخالف صفر) $\leftarrow$ کرده بی بعدی دهد
 rank matrix $\Rightarrow$ معرف بزرگ ترین مرتبه ماتریسی است که درمیان آن مخالف صفر است

$K = n - j = 4 - 2 = 2$

کام چهارم Repeating Variable D, γ

کام پنجم $\Pi_1 = D^a \gamma^b h = \{L\}^a \{ML^{-2}T^{-2}\}^b \{L\} = M^0 L^0 T^0$

$$\begin{cases} a - 2b + 1 = 0 \\ +b = 0 \\ -2b = 0 \end{cases}$$

$\Pi_2 = D^a \gamma^b \gamma = \{L\}^a \{ML^{-2}T^{-2}\}^b \{MT^{-2}\} = M^0 L^0 T^0$

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + 1 = 0 \\ -2b - 2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \Pi_1 = \frac{h}{D} \\ \Pi_2 = \frac{\gamma}{D^2 \gamma} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Pi_1 = g(\Pi_2) \\ \frac{h}{D} = g\left(\frac{\gamma}{D^2 \gamma}\right) \end{cases}$ تابع g به کمک آزمایش بدست می آید

Dimensionless Parameters $\frac{Dv}{\mu}$ $\Rightarrow$ کرده ای بی بعد

inertial force $= ma = m \frac{dv}{dt} \propto \rho L^3 \frac{v^2}{L} = \rho v^2 L^2$

viscous force $= \tau A = \mu \frac{dv}{dy} A \propto \mu \frac{v}{L} L^2 = \mu v L$

Pressure force $= \Delta p A \propto \Delta p L^2$

gravity force $= mg = \rho V g \propto \rho L^3 g$

surface tension force $\propto \gamma L$

گروهی بی بعد از تقسیم این نیروها به دست می آید (ریا یا ابعادی هم بعد دیگر)

Reynold's Number

$$Re = \frac{\text{inertial force}}{\text{viscous force}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu U L} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}$$

$$Re \begin{cases} \gg 1 & \text{Turbulent flow} \\ \ll 1 & \text{Laminar flow} \end{cases}$$

Euler's Number

$$Eu = \frac{\text{Pressure force}}{\text{inertial force}} = \frac{\Delta P L^2}{\rho U^2 L^2} = \frac{\Delta P}{\rho U^2}$$

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad \text{ضریب دینامیک}$$

$$Ca = \frac{P - P_v}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad \text{cavitation number}$$

Froude Number

$$Fr = \frac{\text{inertial force}}{\text{gravity force}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{U^2}{g L} \quad \text{or} \quad \frac{U}{\sqrt{g L}}$$

Free surface flow
جریان‌های با سطح آزاد

open channels
surface waves
ship resistance

عدد فروند: تأثیر کشش جاذبه روی جریان
اثرات را باید در نظر گرفت $Fr \ll 1$ با سطح آزاد

Weber Numbers

$$We = \frac{\text{inertial force}}{\text{surface tension } \sigma} = \frac{\rho U^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$$

droplet (شکل دانه قطره)
در کشش سطحی با افتخای سطح

$We \ll 1$ اثرات کشش سطحی باید در نظر گرفته شود

Mach Number

$$Ma = \frac{U}{a} \rightarrow \text{sound speed (سرعت صوت)} \rightarrow \sqrt{\gamma R T}$$

معدوم: جریان تراکم ناپذیر $Ma < 0.3$

Flow Similarity & Modelling

شرایط مدل:

1) geometric similarity (شکل هندسی باید یک باشد)

$$\frac{\text{dimension of model}}{\text{dimension of prototype}} = \text{const} \leftarrow \text{length scale ratio}$$

2) Kinematic similarity

time scale ratio
↓
نسبت سرعت /
نسبت اندازه

سرعت: در نقاط متناظر مدل و نمونه اصلی در یک جهت یکسان و با نسبت‌های اندازه یکسان
خطوط جریان: به برای مدل و نمونه اصلی $\leftarrow$ برابری هندسی

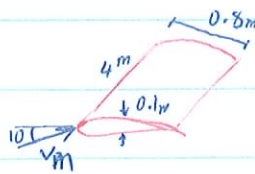
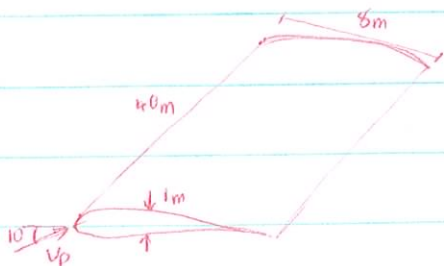
3) Dynamic Similarity

تولید نیرو در جهت آن در شط متناظر مدل و غونذ اصلی باید یک باشد
- ثابت هندسی و ثابت به سیمانیکی شرط لازم برای ثابت به سیمانیکی است

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n) \quad \text{شرط ثابت به سیمانیکی}$$

اگر کردهای جی بعد برای مدل و غونذ اصلی یکسان باشند آن گاه شرایط جریان برای مدل و غونذ اصلی ثابت به خواهد بود
(به همراه ثابت به هندسی، ثابت به سیمانیکی)

$$\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p} \quad \Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$$



مثال:

مثال: هنگامی که باد روی یک جزیره ای از مدل جریان می یابد جریان روی جزیره ای در سطح پوست آن با رگاسش جبهه شکل می شود. دلیل این امر نیروی مشابهی در خط ناک روی جسم ناشی از این جریان می جوشی. رگاسش شکل این گردآب از اهمیت برخوردار است

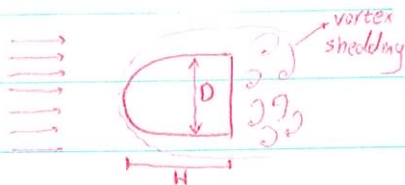
$$\frac{\omega D}{V} = g\left(\frac{D}{H}, \frac{V D}{\nu}\right)$$

برای یک سازه جبهه $D = 0.1m$ $H = 0.3m$ سرعت باد $50 km/h$ با آزمایشی مدلی از این سازه با قطر $D_m = 20mm$ در داخل تونل آب شکل گردآب برابر با $\omega_m = 50 Hz$ اندازه گیری شده. مطلوب است

الف) طول مدل H_m

ب) سرعت آب V_m

پ) رگاسش شکل گردآب در سازه واقعی



$$\frac{D_m}{H_m} = \frac{D_p}{H_p} \Rightarrow H_m = \frac{H_p}{D_p} D_m = 60mm \quad (\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p})$$

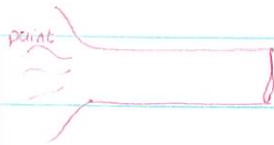
$$Re_m = Re_p \Rightarrow \frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p D_p}{\mu_p} \Rightarrow V_m = \frac{\mu_m}{\mu_p} \times \frac{\rho_p}{\rho_m} \times \frac{D_p}{D_m} V_p = 4.79 m/s$$

$$\Pi_{3,m} = \Pi_{3,p} \quad \frac{\omega_m D_m}{V_m} = \frac{\omega_p D_p}{V_p} \rightarrow \omega_p = \frac{V_p}{V_m} \times \frac{D_m}{D_p} \omega_m = 29 Hz$$

CHAPTER 6 viscous flow in pipes & ducts

Reynolds experiment

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$



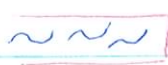
$$Re < 1000$$

laminar flow
جریان لایه‌ای



$$Re \sim 2000$$

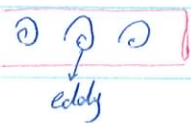
از این اغتشاشات



$$Re \sim 2200$$

اجداد گردایی

turbulent flow



$$Re > 2300$$

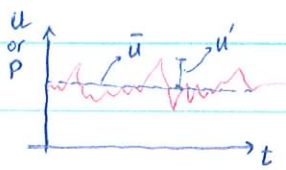
از این گردایی

(کنترل جریان)

critical Re
pipe

Re زیاد $\rightarrow$ از این نیروی اینرسی
کاهش نیروی چسبندگی

ویژگی های جریان آشفته



$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ p = \bar{p} + p' \end{cases}$$

تابع زمان

$$Re \gg 1$$

Large Re (1)

irregularity or randomness (2)



Rapid mixing (3)

3D vorticity fluctuation (4)

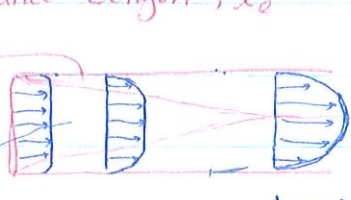
dissipation خاصیت میرایی (5)

$Re_{critical} \approx 2300$ $\begin{cases} < 2300 \rightarrow \text{laminar flow} \\ > 2300 \rightarrow \text{turbulent flow} \end{cases}$

Entrance Length, l_e

boundary layer

inviscid core region



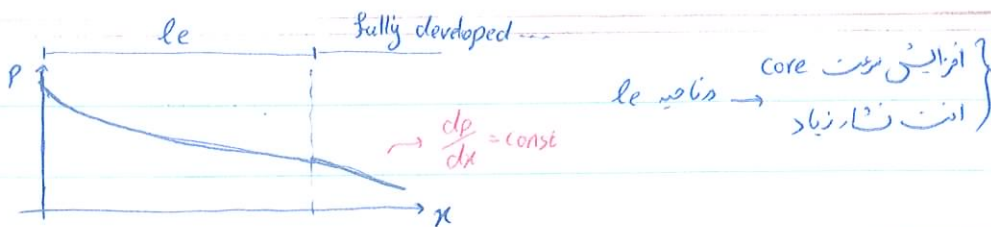
محل برش می توان

بررسی میکنیم

entrance region

fully developed flow region

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



$$le = f(d, \mu, \bar{V}, f) \rightarrow \frac{le}{d} = g\left(\frac{\rho \bar{V} d}{\mu}\right) = g(Re)$$

laminar flow $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{le}{d} = 0.06 Re$$

$$Re = 2300 \rightarrow le = le_{max} = 0.06 \times 2300 = 138d$$

* در حالتی که برای قسمت fully deve... به طول le باید دست کرد (آب تا قبل از این نقطه است)

turbulent flow $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{le}{d} = 0.4 Re^{\frac{1}{4}}$$

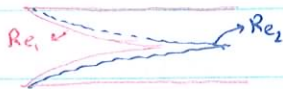
Re	4000	10^4	10^6	10^8
$\frac{le}{d}$	18	20	44	95

eddy $\rightarrow$ انتگرال می‌کنیم جریا آرام آشفته $\rightarrow$ به علت eddy

$$le = 80d$$

* رشد لایه مرزی در جریان آشفته سریع تر است نسبت به جریان آرام

* با افزایش Re، طول مدعی افزایش می‌یابد

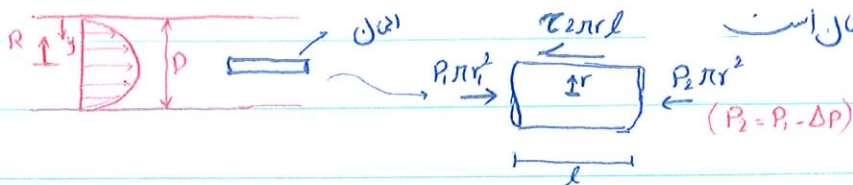


$$Re_2 > Re_1$$

$$Re \uparrow \rightarrow le \uparrow$$

(in laminar flow) fully developed در ناحیه

* بر دخیل سرعت در لوله یکسان است



Momentum Eq.

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho v_x dV + \int_{cv} \rho v_x (v_x \cdot n) dA$$

جریان دود و خروجی کل

چون یکی تابعی از r و دیگری تابعی از r است

$$\Rightarrow P_1 \pi r^2 - (P_1 - \Delta P) \pi r^2 - \tau 2 \pi r l = 0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{l} = \frac{2 \tau}{r} = \text{const}$$

تابعی از r

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} \leftarrow P \text{ به سمت قطبی در } x \text{ تغییر می‌کند}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r=R \\ \tau = \tau_{wall} \end{array} \right. \rightarrow \frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau_w}{R} = \frac{2\tau}{r} \Rightarrow \tau = \tau_w \frac{r}{R} = 2\tau_w \frac{r}{D}$$

$$\Delta p = \frac{2l}{R} \tau_w$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr} = \tau_w \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{\tau_w}{\mu} \times \frac{r}{R} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right) r \xrightarrow{\text{انتگرال}} u(r) = \frac{-\Delta p}{2\mu l} \int r dr = \frac{-\Delta p}{4\mu l} r^2 + C_1$$

$$\text{شرط مرز} \rightarrow r=R = \frac{d}{2} \Rightarrow u(R)=0 \rightarrow C_1 = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{\Delta p d^2}{16\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$u_{max} \text{ (at } r=0 \text{)}$

$$Q = \int u dA = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^2}{2} u_{max}$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi R^2}{2} u_{max}}{\pi R^2} = \frac{u_{max}}{2} \rightarrow u_{max} = 2\bar{V}$$

* سرعت دردی = سرعت متوسط در مقطع

* از سرعت دردی ($\bar{V}$) به $\frac{dp}{dx}$ (افت فشار) بدست می آید

$$Q = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128 \mu l} \rightarrow \Delta p = \frac{8 \mu l Q}{\pi R^4} \quad \bar{V}$$

افت فشار در جریان آرام توسعه یافته نسبت خطی با سرعت متوسط دارد

Transition Flow (برای جریان آشفته) → زیر سطح

$$\tau_w = f(f, v, \mu, d, \varepsilon) \quad (\text{آنتزابعادی})$$

$$\rightarrow \frac{8\tau_w}{f \bar{V}^2} = f = g(Re_d, \frac{\varepsilon}{d})$$

Laminar Flow

$$\tau_w = -\mu \frac{du}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{2\mu u_{max}}{R} = \frac{4\mu \bar{V}}{R}$$

$$f = \frac{8(4\mu \bar{V})}{f \bar{V}^2 R} = \frac{64}{Re_d} \quad (Re_d = \frac{f \bar{V} d}{\mu})$$

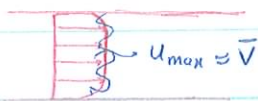
Energy Eq.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_{friction} + h_{turbine} - h_{pump}$$

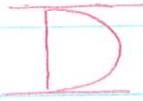
$$h_{friction} = \frac{\Delta P}{\gamma} \quad \text{تپ} = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho g d^4}$$

$$h_f = \frac{32 \mu L \bar{V}}{\rho g d^2} = \frac{64}{\frac{\rho \bar{V} d}{\mu}} \times \frac{L}{d} \times \frac{(\bar{V})^2}{2g} \quad \text{Darcy-Weisbach Eq} \quad h_f = f \times \frac{L}{d} \times \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

(in turbulent flow) fully developed



turbulent ($\alpha=1$)



Laminar ($\alpha=2$)

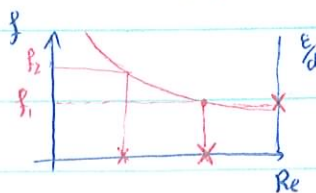
$$\bar{u} = u_{max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad n=7.0$$

$$f = g \left(Re_d, \frac{\epsilon}{d} \right) \quad \text{ضریب اصطکاک}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\epsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re_d \sqrt{f}} \right]$$

(بر صورت تجربی)

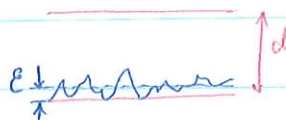
* نیاز به حدس اولیه دارد



* به علت مشکل بدین از گراف آن استفاده می کنند طریقه خواندن

handout

* مقدار ϵ :



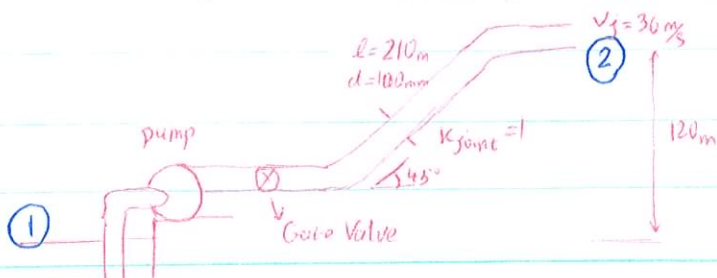
* مقدار K از غوطه بردی است

$$h = \underbrace{f \times \frac{L}{d} \times \frac{\bar{V}^2}{2g}}_{\text{افت جزئی}} + \underbrace{K \frac{\bar{V}^2}{2g}}_{\text{افت می اصلی}}$$

در معادله انرژی بجای h_f

* در دبی حوازی و سری در handout

مثال، مطابق با شکل آب با دبی $135 \frac{m^3}{hr}$ با ارتفاع $120m$ پمپ می شود با در نظر گرفتن رانندگی پمپ
معادل با 70 درصد توان مصرفی پمپ را تعیین کنید (زبری لوله $\epsilon=0.26mm$ است)



هرگاه تغییر کند باید در

$$\sum f_i \frac{L_i}{d_i} \frac{\bar{V}_i^2}{2g}$$
 جمله جدید زیارت

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 - h_{\text{pump}} + f \frac{L}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g} + \underbrace{\sum \frac{K_i \bar{V}_i^2}{2g}}_{\text{موتن های است در این جا}}$$

$$K_e = 1 + 0.2 + 2 \times 0.35 + 0.75 \quad (\text{از افت مددی و فرسایشی به پمپ موتن نظر})$$

$\downarrow$ joint $\downarrow$ gate valve $\downarrow$ زانویی 45° $\downarrow$ زانویی 90°

$$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}} \quad Z_1 = 0 \quad Z_2 = 120 \quad V_1 = 0 \quad V_2 = V_j = 36 \text{ m/s}$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = 135 \times \frac{1}{3600} \times \frac{4}{\pi \times 0.1^2} = 4.775 \text{ m/s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Re = \frac{\rho \bar{V} d}{\mu} = \frac{\bar{V} d}{\nu} = \frac{4.775 \times 0.1}{10^{-6}} = 4.77 \times 10^5 \xrightarrow{\text{moody chart}} f = 0.027 \\ \frac{\epsilon}{d} = \frac{0.26}{100} = 0.0026 \end{array} \right.$$

$$\dot{W}_p = \gamma Q h_p = f \gamma Q h_p = \dot{m} g h_p$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_p &= \left[g(Z_2 - Z_1) + \frac{\bar{V}^2}{2} + f \frac{L}{d} \frac{\bar{V}^2}{2} + \sum K_i \frac{\bar{V}_i^2}{2} \right] \dot{m} \\ &= \left[9.81 \times 120 + \frac{36^2}{2} + 0.027 \times \frac{210}{0.1} \times \frac{4.77^2}{2} + 2.65 \times \frac{4.77^2}{2} \right] \times 1000 \times \frac{135}{3600} = 93.6 \times 10^3 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\dot{W}_p |_{\text{actual}} = \frac{\dot{W}_p}{\eta} = 134 \text{ kW}$$

$\eta_{0.7}$