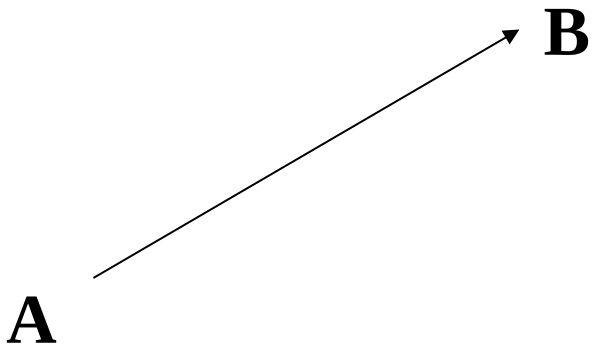
ریاضی عمومی 2
بردارها

بخش 2 : آشنایی با بردار



پیکان : پاره خطی است جهت دار در فضا که یک نقطه را به نقطه ی دیگر منتقل می کند.

هر پیکان دارای سه مشخصه است

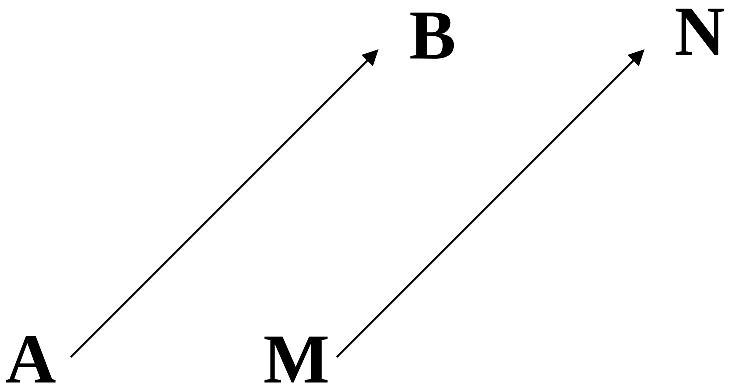
1- طول

2- راستا

3- جهت

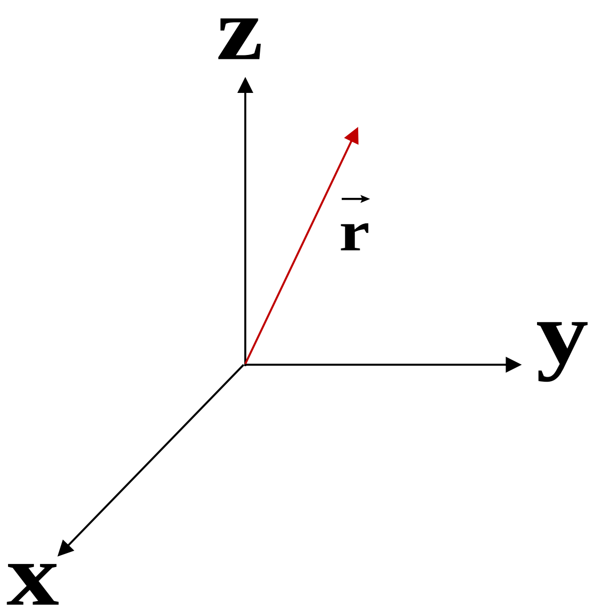
دو پیکان هم ارز (هم سنگ)

دو پیکان را هم ارز (هم سنگ) گوییم هرگاه طول، راستا و جها آنـها یکسان باشد.



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$$

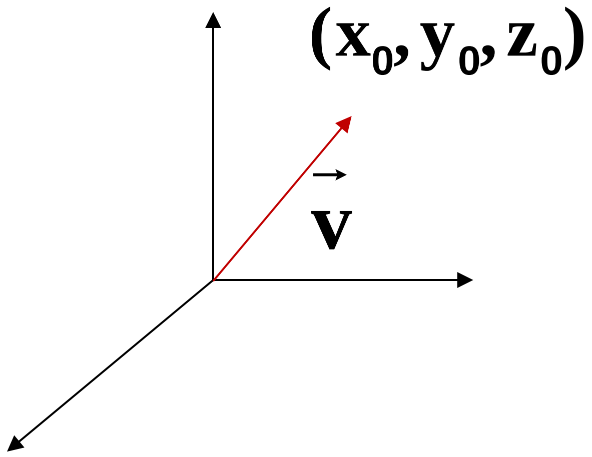
بردار



پیکانی که از مبدأ مختصات شروع شود را بردار گوییم.

تذکر : معمولا بردارها را با حروف کوچک نمایش می دهیم.

مختصات یک بردار



اگر نقطه ی (x_0, y_0, z_0) ، نقطه ی انتهایی بردار

باشد، آن گاه گوییم مختصات بردار $\vec{v}$ ،

(x_0, y_0, z_0) است و می نویسیم : $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$

قرارداد :

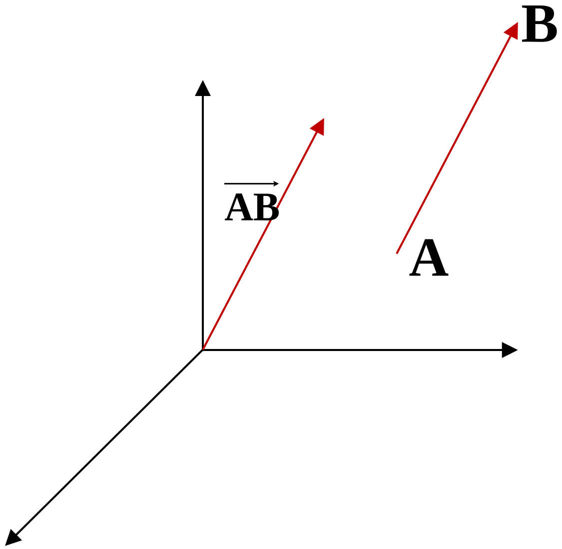
نقطه ی $(0,0,0)$ را بردار صفر نامیده و با نماد $\vec{O}$ نشان می دهیم.

نکته

هر نقطه از فضا یک بردار را مشخص می کند و برعکس. یعنی بین نقاط فضا و بردارهای فضا یک تناظر یک به یک وجود دارد.

بردار هم ارز با یک پیکان

فرض کنیم نقاط $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی پیکان AB باشند. در این صورت، بردارهم ارز با پیکان AB را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان می دهیم و مختصات آن عبارت است از :



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

نکته

طول بردار $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$ برابر است با :

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x_2^{\,2} + y_0^{\,2} + z_0^{\,2}}$$

دو بردار مساوی

دو بردار را مساوی گوییم هرگاه نقاط انتهایی آن ها یکسان باشند.

نتیجه 1 : اگر دو بردار مساوی باشند بر هم منطبقند.

نتیجه 2 : دو بردار $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ مفروضند. در این صورت :

$$\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$$

نکته

برای یافتن تصویر یا قرینه ی یک بردار نسبت به محورها یا صفحات مختصات کافی است تصویر یا قرینه ی نقطه ی انتهایی آن را بیابیم.

مجموع دو بردار

دو بردار $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ مفروض اند. مجموع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}+\vec{b}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

نتیجه

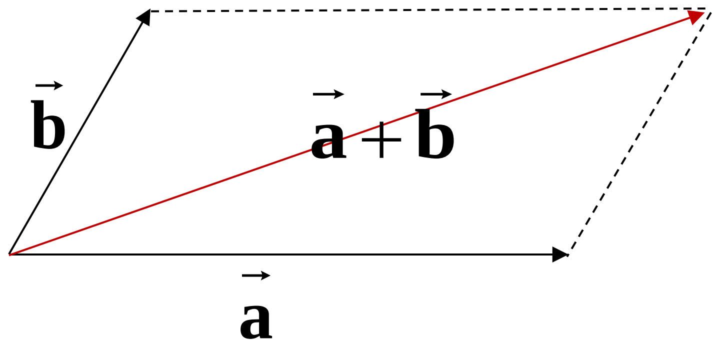
الف) جمع بردارها خاصیت جابه جایی دارد: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

ب) جمع بردارها خاصیت شرکت پذیری دارد: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

ج) بردار $\overline{O}$ عضو خنثی عمل جمع است: $\vec{a}+\overline{O}=\overline{O}+\vec{a}=\overline{O}$

تعبیر هندسی جمع دو بردار (روش متوازی الاضلاع)

اگر با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک متوازی الاضلاع بسازیم، آن گاه بردار $\vec{a}+\vec{b}$ قطری از متوازی الاضلاع است که از مبدأ به a و b رسم شود.

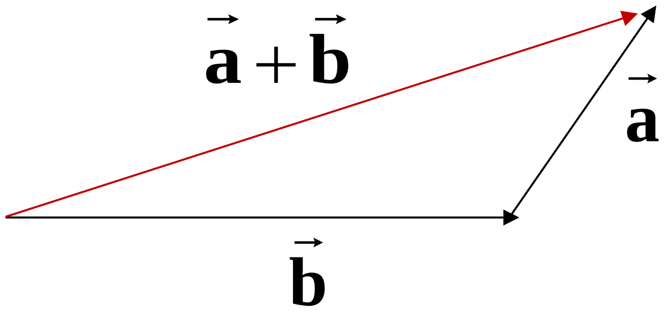


تذکر

اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم مبدأ نباشند، برای یافتن مجموع آن ها ابتدا هم ارز یکی از بردارها را از مبدأ دیگری رسم می کنیم و سپس آن ها را جمع می زنیم.

نکته

اگر ابتدای بردار $\vec{b}$ بر انتهای بردار $\vec{a}$ قرار گیرد، آن گاه $\vec{a}+\vec{b}$ برداری است که از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ رسم شود. (روش مثلثی)



ضرب عدد در بردار

حاصل ضرب عدد حقیقی $\mathbf{r}$ در بردار $\vec{a}=(x,y,z)$ را با نماد $\mathbf{r}\vec{\mathbf{a}}$ نشان داده و به صورت بردار زیر تعریف می کنیم :

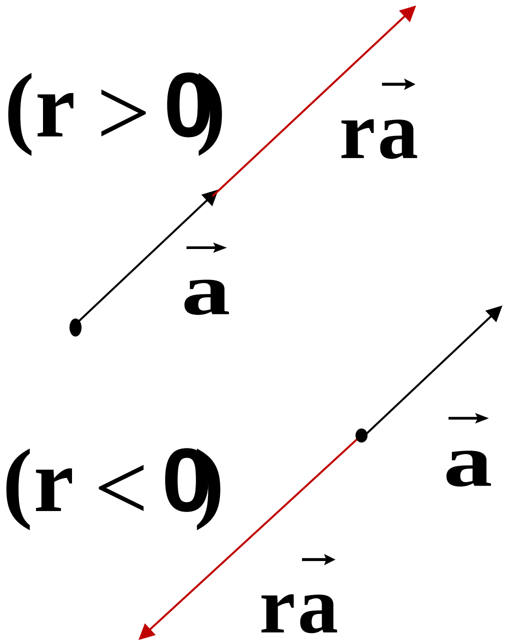
$$\mathbf{r}\vec{\mathbf{a}}=(\mathbf{rx},\mathbf{ry},\mathbf{rz})$$

نکته

عدد حقیقی r و بردار $\vec{a}$ مفروضند. در این صورت:

الف) اگر $r > 0$ ، آن گاه $r\vec{a}$ برداری موازی و هم جهت با بردار $\vec{a}$ است.

ب) اگر $r < 0$ ، آن گاه $r\vec{a}$ برداری موازی ولی در خلاف جهت $\vec{a}$ است.



خواص ضرب عدد در بردار

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ اعداد حقیقی r و s مفروضند. در این صورت :

$$1)(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

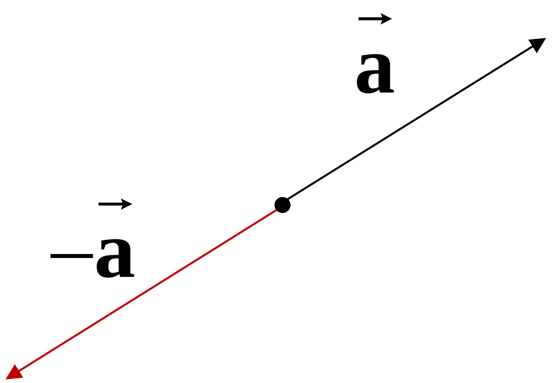
$$2)r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$3)r(s\vec{a}) = s(r\vec{a}) = (rs)\vec{a}$$

$$4)\left|r\vec{a}\right| = |r|\left|\vec{a}\right|$$

قرینه ی یک بردار

بردار $\vec{a}$ مفروض است. بردار $(-1)\vec{a}$ را قرینه ی بردار $\vec{a}$ گوییم و با نماد $-\vec{a}$ نشان می دهیم.



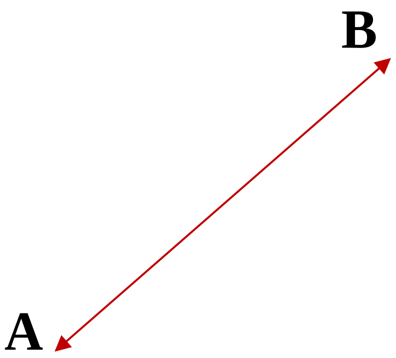
نتیجه 1 : برای هر بردار دلخواه $\vec{a}$ داریم :

الف) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overline{O}$

ب) $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$

نتیجه 2 : برای دو نقطه ی A و B داریم :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$$



تفاضل دو بردار

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند. تفاضل این دو بردار را به صورت $\vec{a}+(-\vec{b})$ تعریف کرده و با نماد $\vec{a}-\vec{b}$ نشان می دهیم.

نتیجه

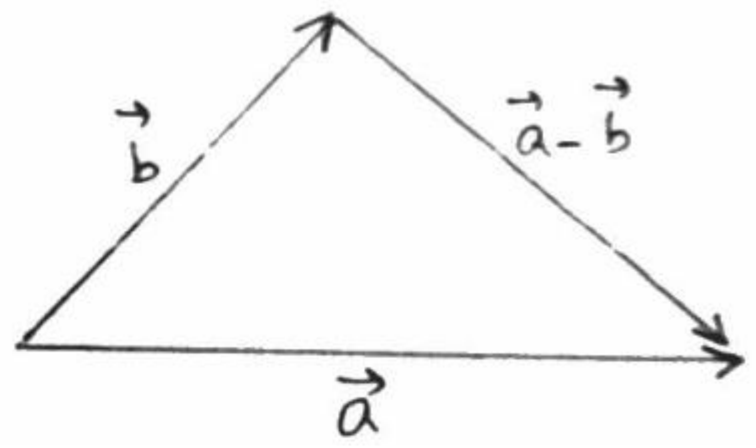
اگر $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ ، آن گاه :

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

تعبیر هندسی تفاضل دو بردار

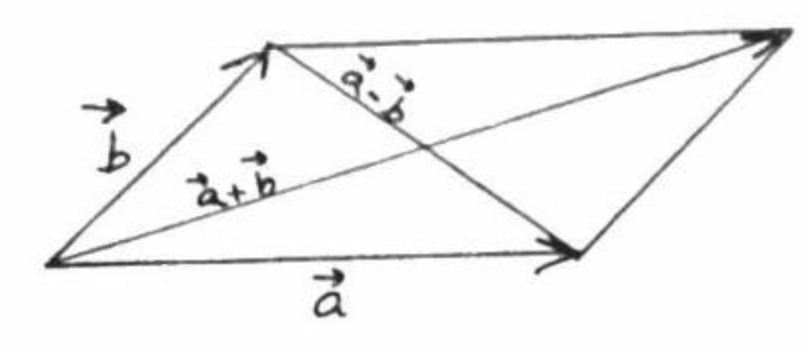
دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند. در این صورت $\vec{a}-\vec{b}$ برداری است که از انتهای $\vec{b}$
بردار به انتهای بردار $\vec{a}$ رسم شود.

$$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$$



نتیجه

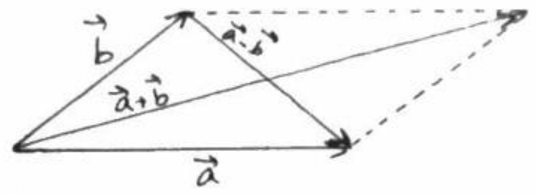
اگر با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک متوازی الاضلاع بسازیم، قطرهای متوازی الاضلاع، بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ را نشان می دهند.



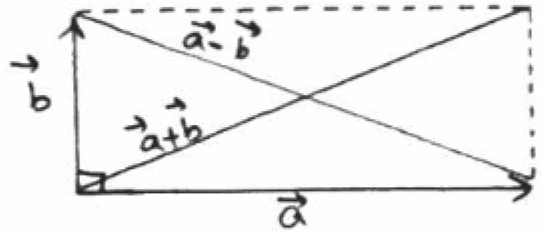
نکته

اگر زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، آن گاه:

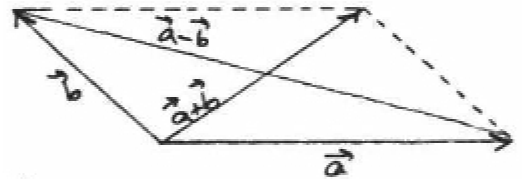
الف) $\alpha < 90^\circ \Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| > \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$



ب) $\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

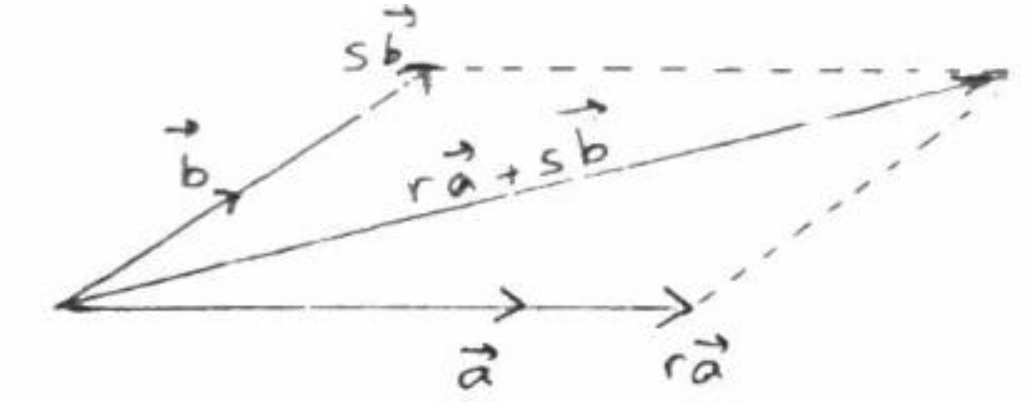


ج) $\alpha < 90^\circ \Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| < \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$



ترکیب خطی دو بردار

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و اعداد حقیقی r و s مفروض اند. در این صورت هر بردار به فرم $\vec{u} = r\vec{a} + s\vec{b}$ را یک ترکیب خطی از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ گوییم.



نکته

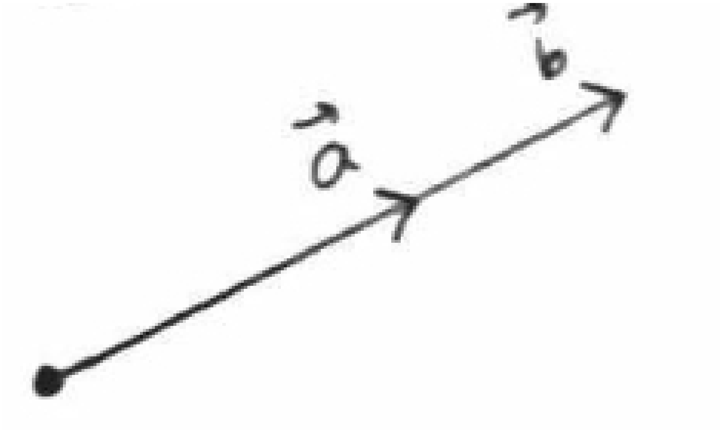
هر ترکیب خطی از دو بردار a , b در صفحه ی این دو بردار قرار دارد.

تذکر

ترکیب خطی سه بردار یا بیشتر هم همانند دو بردار تعریف می شود.

توازی دو بردار

دو بردار a , b با هم موازیند هر گاه مضربی از یکدیگر باشند.



$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = r\vec{b} \qquad (r \in R)$$

نکته (شرط معادل برای توازی دو بردار)

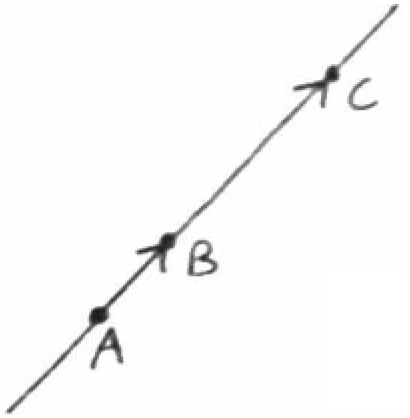
دو بردار $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ مفروضند.

در این صورت :

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

نکته

سه نقطه ی A , B , C در یک راستا قرار دارند، هرگاه :



$$\overrightarrow{AB} \square \overrightarrow{AC}$$

تذکر

در نکته ی فوق می توان از شروط $\overrightarrow{AB} \square \overrightarrow{BC}$ یا $\overrightarrow{AC} \square \overrightarrow{BC}$ هم استفاده کرد.

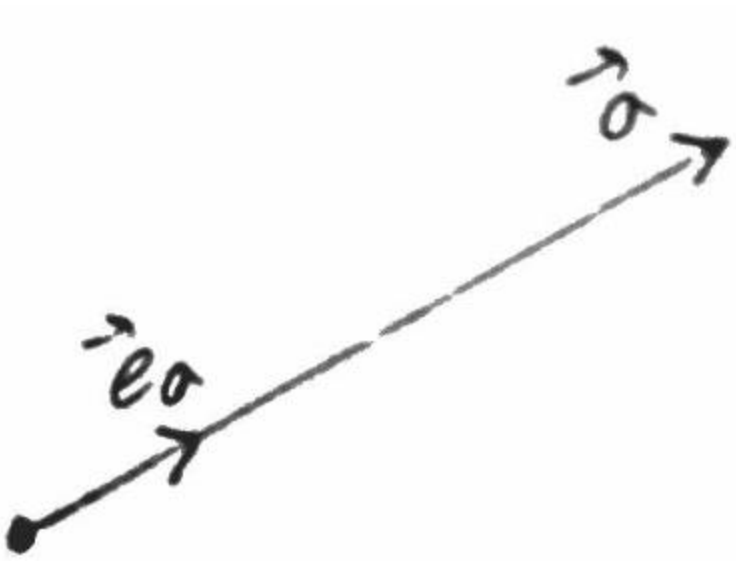
بردار یکه

هر بردار به طول یک را بردار یکه (واحد) می گوییم.

بردار یکه ی نظیر یک بردار

بردار ناصفر $\vec{a}$ مفروض است. اگر برداری هم راستا و هم جهت با $\vec{a}$ و به طول یک واحد بسازیم، این بردار را «بردار یکه ی نظیر $\vec{a}$ » گوییم و با $\overrightarrow{e_a}$ نمایش می دهیم.

$$\overrightarrow{e_a} \square \vec{a} \quad , \quad \left|\overrightarrow{e_a}\right| = 1$$



قضیه

برای هر بردار ناصفر $\vec{a}$ داریم :

$$\overrightarrow{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

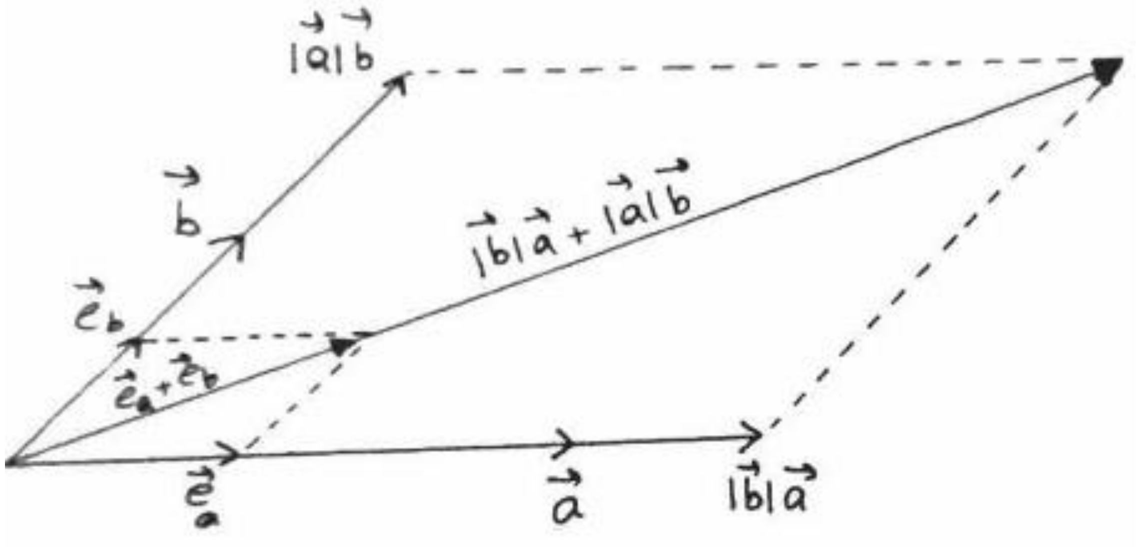
.

تذكر

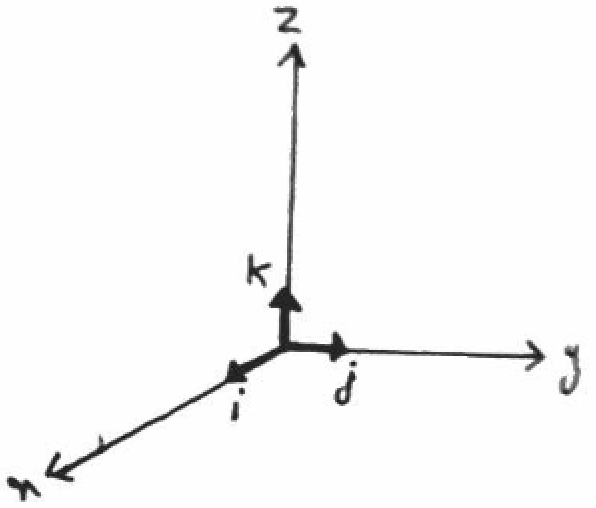
$$\overrightarrow{\mathbf{e}_{\mathbf{a+b}}} \neq \overrightarrow{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}} + \overrightarrow{\mathbf{e}_{\mathbf{b}}}$$

نتیجه

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند. بردارهای $\vec{e_a}+\vec{e_b}$ و $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ نیمساز زاویه ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشند.



بردارهای یکه ی محورهای مختصات



سه بردار $\vec{i}=(1,0,0)$ ، $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$ را

به ترتیب بردارهای یکه ی محورهای Ox و Oy و Oz گوی

قضیه

هر بردار $\vec{a}=(x,y,z)$ را می توان به صورت منحصر به فردی بر حسب بردارهای یکه ی محورهای مختصات نوشت:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

پایان