به نام خدا

مدارهای منطقی

مدرس : وحیدرضا حجتی منش

آموزشکده فنی وحرفه ای حکیم عباس دارابی

رَسولُ اللهِ ﷺ : كُلُّ أمْرٍ ذی بالٍ لایُبْدَأُ فیهِ بِـ« بِسْمِ اللهِ الرَّحْمنِ الرَّحیمِ » أقْطَعُ
هر کار مهمّی که با « بسم الله الرّحمن الرّحیم» آغاز نشود بی‌فرجام است
منتخب میزان‌الحکمه ح ۳۱۳۲

اعداد دسیمال (DECIMAL) یا دهدهی(مبنای ۱۰)

پایه(مبنا) ۱۰ است و ارقام ۰، ۱، ... ۹ می باشند.

۱۰-۱=ارقام مورد استفاده

هر محل(مکان رقم) دارای یک وزن است:

وزنWeights:

$$10^3 \; 10^2 \; 10^1 \; 10^0 \bullet 10^{-1} \; 10^{-2} \; 10^{-3}$$

به عنوان مثال عدد ۱۹۳۶/۲۵ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$1\times10^3+9\times10^2+3\times10^1+6\times10^0+2\times10^{-1}+5\times10^{-2}$$

مثال های دیگر:

$$924 = 9 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

$$0.32 = 3\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

سیستم عدد نویسی باینری(BINARY) یا دودویی(مبنای۲)

- پایه (مبنا) ۲ است و ارقام ۰، ۱هستند.
- ۱-۲ = ارقام مورد استفاده

تفریق اعداد باینری

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & & & 2 & & \\
 & 0 & \cancel{2} & 2 & 0 & 0 & 2 & \\
 & \cancel{1} & 0 & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 1 \\
- & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

جمع اعداد باینری

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

سیستم عدد نویسی اکتال(OCTAL) یا هشتایی(مبنای۸)

پایه ۸ است و رقمها ۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰هستند.

مثال:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 0 & 9 & & \\
 & 2 & \cancel{1} & 1 & 7 & 5 \\
- & 1 & 0 & 5 & 1 & 3 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 6 & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 7 & 3 & 4 & 0 & 3 \\
+ & & 7 & 7 & 4 & 5 & 1 \\
\hline
 & 1 & 7 & 3 & 0 & 5 & 4
\end{array}
$$

سیستم عدد نویسی هگزادسیمال(HEX) یا ۱۶تایی(مبنای۱۶)

پایه (مبنا) ۱۶ است.

۱-۱۶ = ارقام مورد استفاده (از ۰ تا ۱۵ عددهای مورد استفاده می باشند)

رقمهای ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ از سیستم دهدیی قرض گرفته شده اند و از A, B, C, D, E, F به ترتیب برای نمایش رقمهای ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ استفاده می گردد.

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

A=10
B=11
C=12
D=13
E=14
F=15

تبدیل مبناهای اعداد

- نکته: با تغییر مبنای اعداد ،ماهیت آن ها عوض نمی شود بلکه فقط شکل نشان دادن آن ها تغییر می کند.

$$a = (a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})$$

مبنای۲(binary)

مبنای۱۰(Decimal)

مبنای۸(octal)

مبنای ۱۶(hexadecimal): شامل ارقام ۰تا۹ و a,b,c,d,e,f   که:

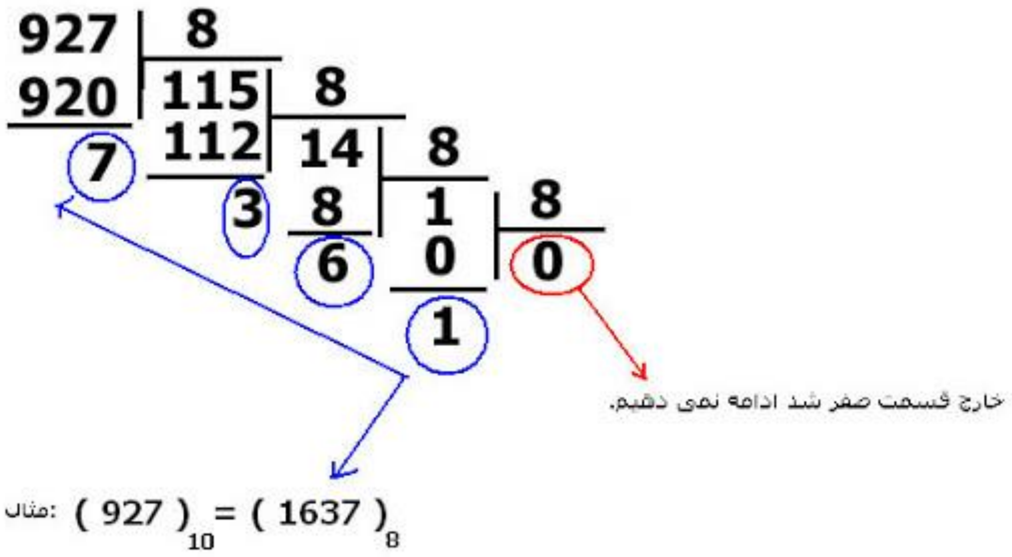
$$\left\{\begin{array}{l} a=10 \\ b=11 \\ c=12 \\ d=13 \\ e=14 \\ f=15 \end{array}\right.$$

تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای r(روش تقسیمات متوالی)

قسمت صحیح عدد را متوالیا به r تقسیم و قسمت اعشاری عدد را متوالیا در rضرب می کنیم.

مثال ۱:

$$(927)_{10} = (؟)_8$$

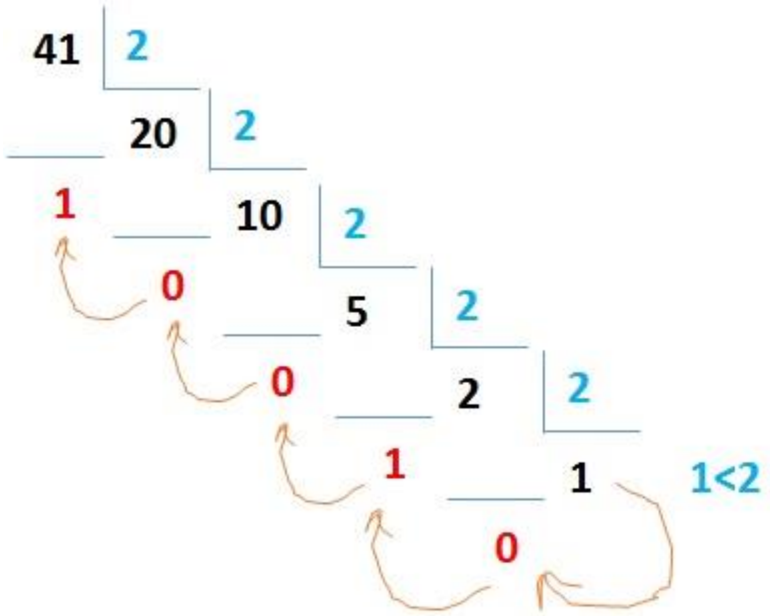


تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای r(روش تقسیمات متوالی)

قسمت صحیح عدد را متوالیا به r تقسیم و قسمت اعشاری عدد را متوالیا در rضرب می کنیم.

مثال۲:

$$(41.75)_{10} = (؟)_2$$



$$\begin{array}{r} 0.75 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.05 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.00 \end{array}$$

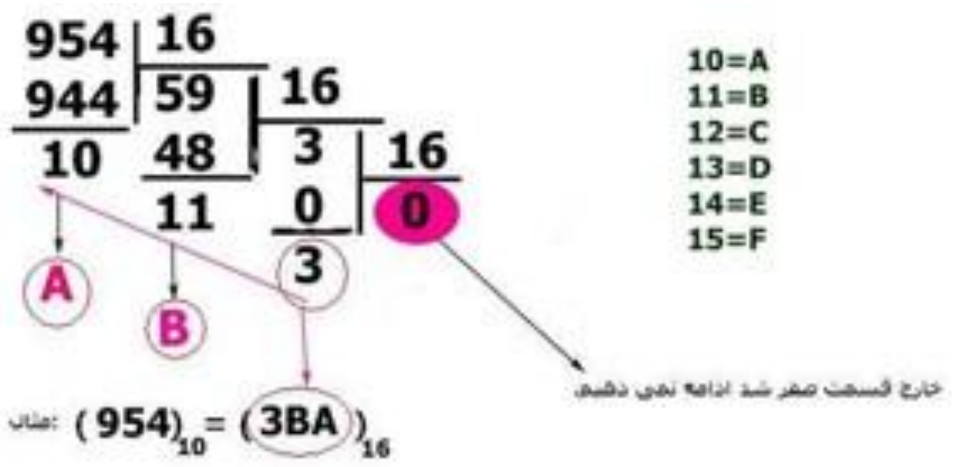
41.75 = $(101001.11)_2$

تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای r(روش تقسیمات متوالی)

قسمت صحیح عدد را متوالیا به r تقسیم و قسمت اعشاری عدد را متوالیا در rضرب می کنیم.

مثال۳:

$$(954)_{10} = (؟)_{16}$$



تبدیل عدد از مبنای r به مبنای ۱۰

برای اینکه بتوانیم اعداد در مبنای ۲ را به مبنای ۱۰ تبدیل کنیم، هر رقم را در ارزش مکانی آن ضرب می کنیم سپس اعداد بدست آمده را با هم جمع می کنیم، پاسخ بدست امده در مبنای ۱۰ خواهد بود.

$$a = (a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})$$

$$\sum_{i=-m}^{n} a_i (r)^i$$

مثال: معادل دسیمال عدد باینری (۱۰۰۱۰۱) را محاسبه نمایید.

5 4 3 2 1 0

(100101)

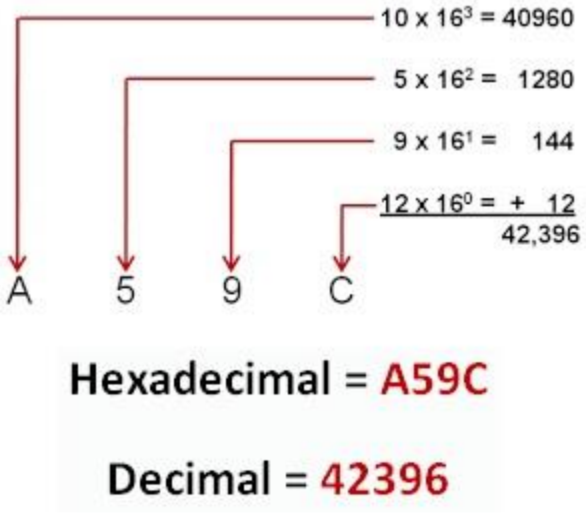
(100101)

$(1x2^5)+(0x2^4)+(0x2^3)+(1x2^2)$ $(0x2^1)$ $(1x2^0)$

32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = (37)

مثال۲:

$(A59C)_{16} = (؟)_{10}$



مثال3:

$(3FB)_{16} = (؟)_{10}$

- مثال:

$(3FB)_{16} = 3*16^2 + 15*16^1 + 11*16^0$

(in decimal) $= 768 + 240 + 11$

$= (1019)_{10}$

تبدیل باینری به اکتال
مبنای۲ به ۸

$8 = 2^3$

روش محاسبه: قسمت عدد صحیح را از ممیز ۳رقم ۳رقم به سمت چپ جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم.

قسمت اعشاررا از ممیزبه سمت راست۳رقم ۳رقم جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم .

Octal	Binary
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1

مثال

صفر در نظر می گیریم

$$(10110.01110)_2$$

$$(2\ \ 6\ .\ 3\ \ 4)_8$$

تبدیل اکتال به باینری:

روش محاسبه: به ازاء هر عدداکتال معادل باینری آن را از جدول روبرو می نویسیم.

$$(356.7)_8 = (011\ 101\ 110\ .111)_2$$

تبدیل باینری به هگز

$16 = 2^4$

روش محاسبه: قسمت عدد صحیح را از ممیز ۴رقم ۴رقم به سمت چپ جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم.

قسمت اعشاررا از ممیزبه سمت راست۴رقم ۴رقم جدا میکنیم و معادل آن را از جدول تبدیلات مینویسیم .

مثال

صفر در نظر می گیریم

$(1\,1\,1\,1\,0\,.\,0\,1)_2$

$(1\quad E\;.\;4)_{16}$

Hex	Binary
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
A	1 0 1 0
B	1 0 1 1
C	1 1 0 0
D	1 1 0 1
E	1 1 1 0
F	1 1 1 1

تبدیل هگزبه باینری:

روش محاسبه: به ازاء هر عدداکتال معادل باینری آن را از جدول روبرو می نویسیم.

$(A4F.7)_{16} = (1010\ 0100\ 1111\ .\ 0111)_2$

• مکمل گیری

در کامپیوترهای دیجیتالی از تکنیک مکمل گیری برای انجام عمل تفریق یا عملیات منطقی استفاده می کنند.

دو نوع مکمل گیری داریم، هر عدد در مبنای r دارای مکمل r و r-1 است:

اعداد دهدهی ← مکمل ۹ و مکمل ۱۰

اعداد باینری ← مکمل ۱ و مکمل ۲

مکمل r-1:

اگر عدد N در پایه r دارای n رقم باشد مکمل r-1 آن برابر است با: $(r^n-1)-N$

مکمل r: اگر عدد N در پایه r دارای n رقم باشد مکمل r-1 آن برابر است با: (r^n-N)

- مکمل ۹ عدد دهدهی N برابر است با: $(10^n\text{-}1)-N$
- مکمل ۱۰ عدد دهدهی N برابر است با: 10^n-N

مثال مکمل اعداد مبنای ۱۰:

- ✓مکمل ۹ عدد ۱۲۳۴۵ : $(10^5 - 1) - 12345 = 87654$
- ✓مکمل ۹ عدد ۰۱۲۳۴۵ : $(10^6 - 1) - 012345 = 987654$
- ✓مکمل ۱۰ عدد ۷۳۹۸۲۱ : $10^6 - 739821 = 260179$
- ✓مکمل ۱۰ عدد ۲۵۰۰ : $10^4 - 2500 = 7500$
- ✓مکمل ۹ و ۱۰ عدد ۰۰۰۰۰۰۰ را پیدا کنید:

جواب: 9999999 and 0000000

مکمل ۱ عدد باینری N برابر است با: $(2^n-1) - N$

- مکمل ۲ عدد باینری N برابر است با: $2^n - N$

- برای پیدا کردن مکمل ۱ یک عدد باینری تمام ۰ ها را یک و تمام ۱ ها را به ۰ تبدیل کنید.
- برای پیدا کردن مکمل ۲ ، مکمل ۱ را با ۱ جمع کنید.
- یک راه دیگر این است که اولین ۱ را از سمت راست پیدا کرده و تمام ارقام بعد از آن را معکوس کنید.

مثال:

- مکمل ۱ عدد 1101011 برابر است با 0010100
- مکمل ۲ عدد 0110111 برابر است با 1001001
- مکمل ۱ و ۲ عدد 10000000 را پیدا کنید:

جواب: 01111111 و 10000000

استفاده از مکمل گیری برای تفریق اعداد بدون علامت

	۶	۱۲	۴	۱۳	
	~~۷~~	~~۲~~	~~۵~~	~~۳~~	۲
−		۳	۲	۵	۰
	۶	۹	۲	۸	۲

- روش تفریق که تا کنون یاد گرفته اید استفاده از رقم قرضی است.

ولی در مواقعی که تفریق با سیستمهای دیجیتالی پیاده سازی شود به کار بردن

- مکملها آسانتر از راه قبلی است.

- **تفریق دو عدد n رقمی و بدون علامت (M-N) در مبنای r**
- روش کار:
  - M را با مکمل r عدد N جمع کنید: $M + (r^n - N)$
  - اگر M≥N نتیجه جمع دارای رقم نقلی خواهد بود که از آن صرفنظر می کنیم.
  - اگر M≤N نتیجه جمع دارای رقم نقلی نخواهد بود و نتیجه منفی است. لذا عدد را دوباره به فرم مکمل دو تبدیل کنید تا متوجه شوید که نتیجه حاصله منفی، چه عددی است.

مثال ۱)

با به کار بردن مکمل ۱۰، تفریق ۳۲۲۵۰-۷۲۵۳۲را انجام دهید.

M = ۷۲۵۳۲ N=۳۲۲۵۰   M>N

- روش کار:
- M را با مکمل ۱۰ عدد N، جمع کنید:
- M≥N می باشد در نتیجه نتیجه جمع دارای رقم نقلی خواهد بود که از آن صرفنظر می کنیم.

۷۲۵۳۲

+ ۹۶۷۵۰ = مکمل ۱۰ عدد N

۱۶۹۲۸۲ = حاصل جمع

۱۰۰۰۰۰ - = حذف رقم نقلی

۶۹۲۸۲ = جواب

بیت نقلی وجود دارد و از آن صرفنظر میشود

دقت کنید که Mدارای پنج رقم ولی N فقط دارای چهار رقم است . چون هر دو عدد باید دارای تعداد ارقام برابر باشند ، پس باید بصورت ۰۳۲۲۵۰ نوشته می شود .

مثال ۲

- با به کار بردن مکمل ۱۰، تفریق ۷۲۵۳۲–۳۲۵۰ را انجام دهید.

N = ۷۲۵۳۲ M=۳۲۵۰   M<N

M = ۰۳۲۵۰

مکمل ۱۰ عدد N = + ۲۷۴۶۸

حاصل جمع = ۳۰۷۱۸

بیت نقلی وجود ندارد

جواب : – (مکمل ۱۰ عدد ۳۰۷۱۸) = – ۶۹۲۸۲

- روش کار:
- M را با مکمل ۱۰ عدد N جمع کنید: $03250 + (10^5 - 72532)$
- M≤N نتیجه جمع دارای رقم نقلی نخواهد بود و نتیجه منفی است. لذا عدد را دوباره به فرم ممکل دو تبدیل کنید تا متوجه شوید که نتیجه حاصله منفی چه عددی است.

مثال۳)

✓ انجام تفریق $2100-150$ با استفاده از مکمل ۱۰

$M=150$

مکمل ۱۰ N = $\underline{7900}$

جمع = 8050

نتیجه منفی است → بیت نقلی یا سرریز ندارد

جواب = – (مکمل ۱۰ عدد ۸۰۵۰) = – ۱۹۵۰

مثال) تفریق دو عدد باینری

X=1010100   Y=1000011

الف) X-Y و (ب) Y-X را با استفاده از مکمل ۲ بدست آورید .

الف

X =	۱۰۱۰۱۰۰
مکمل ۲ عدد Y =	+۰۱۱۱۱۰۱
حاصل جمع =	۱۰۰۱۰۰۰۱
رقم نقلی حذف شده ۲^۷ =	-۱۰۰۰۰۰۰۰
جواب X-Y =	۰۰۱۰۰۰۱

ب

Y =	۱۰۰۰۰۱۱
مکمل ۲ عدد X =	+۰۱۰۱۱۰۰
حاصل جمع =	۱۱۰۱۱۱۱

رقم نقلی وجود ندارد

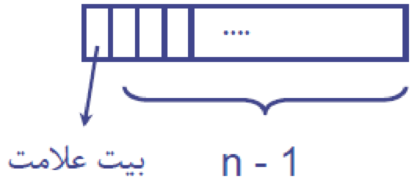
جواب : Y-X = -(مکمل ۲ عدد ۱۱۰۱۱۱۱) = -۰۰۱۰۰۰۱

اعداد منفی

بعلت محدودیت سخت افزار ، کامپیوتر ها باید هر چیزی را با ارقام دودیی نشان دهند که معمولاً این ارقام بیت نامیده می شوند . معمول است که سمت چپ ترین بیت عدد را به علامت اختصاص می دهند . قرار این است که اعداد مثبت را با گذاشتن ۰ و اعداد منفی را با گذاشتن ۱ در محل بیت مزبور(سمت چپ ترین بیت یا پر ارزشترین بیت) نشان دهند. توجه نمایید کاربر است که مشخص می کند که محاسبات به صورت اعداد علامتدار است یا خیر.

به عنوان مثال اگر ۸بیت برای عدد در نظر بگیریم ، ۷بیت جهت نمایش عدد و بیت هشتم جهت تعیین علامت بکار میرود.

- **شیوه های نمایش اعداد منفی**
- مکمل ۱
- مکمل ۲ (مناسبترین روش)
- مقدار و علامت



بعنوان مثال ، فرض کنید عدد ۹ بصورت دودویی با هشت بیت نشان داده شده باشد۹ + بوسیله یک ۰ در سمت چپ ترین مکان از هشت بیت و بدنبال آن معادل دودویی۹ ، نشان داده می شود و نتیجه ۰۰۰۰۱۰۰۱ خواهد بود.

هر چند که فقط یک راه برای نمایش ۹+ وجود دارد ، برای نمایش۹- با هشت بیت سه روش موجود است :

در نمایش مقدار علامت ۱۰۰۰۱۰۰۱

در نمایش مکمل ۱ ۱۱۱۱۰۱۱۰

درنمایش مکمل ۲ ۱۱۱۱۰۱۱۱

جمع دو عدد دودویی علامت دار در سیستم مکمل۲

- مشابه اعداد بی علامت جمع می کنیم و از رقم نقلی تولید شده از آخرین مکان، صرف نظر می کنیم.

$$
\begin{array}{rl}
 & \color{red}{1} \\
 & (1101)_2 = -3 \\
+ & (0110)_2 = +6 \\
\hline
\color{red}{1} & (0011)_2 = +3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
+6 & 00000110 \\
+9 & 00001001 \\
\hline
+15 & 00001111
\end{array}
$$

یادآوری:

- درجمع اعداد بدون علامت، اگر پس از جمع دو عدد بدون علامت رقم نقلی نهایی یک شود سرریز اتفاق افتاده است.

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1 & \\
 & (1101)_2 & = 13 \\
+ & (1100)_2 & = 12 \\
\hline
1 & (1001)_2 & = 9
\end{array}
$$

رقم نقلی نهایی

تفریق دو عدد دودویی علامت دار در سیستم مکمل۲

- عدد اول را با مکمل ۲ عدد دوم جمع می کنیم، و از رقم نقلی خروجی از مکان بیت علامت چشم پوشی می کنیم.

$$\underbrace{(11111010)_2}_{(-6)_{10}} - \underbrace{(11110011)_2}_{(-13)_{10}} = ?$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & 11111010 & = -6 \\
+ & 00001101 & = +13 \\
\hline
 & 100000111 & = +7
\end{array}
$$

$$(00000110)_2 = +6$$

کدهای دودویی برای نمایش ارقام دهدهی

$(18)_{10}$

$(0001\ 1000)_{BCD}$

$(10010)_2$

رقم دهدهی	BCD	2 4 2 1	افزونی 3	8 4 -2 -1
0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0111
2	0010	0010	0101	0110
3	0011	0011	0110	0101
4	0100	0100	0111	0100
5	0101	1011	1000	1011
6	0110	1100	1001	1010
7	0111	1101	1010	1001
8	1000	1110	1011	1000
9	1001	1111	1101	1111

کد گری (Gray)

کدهای حلقوی: بین هر کلمه کد و کلمه کد بعدی تنها یک بیت تغییر کرده باشد.
از معروف ترین کدهای حلقوی کد گری است.

رقم دهدهی	Gray
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100

رقم دهدهی	Gray
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000