محاسبات عددی

مدرس مرادیان

آموزشکده فنی داراب

فصل اول خطاها

فصل اول : خطا ها

انواع خطاها

1. خطامطلق :اگر aمقدار تقریبی عدد Aباشد خطای مطلق را با e(a) نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم

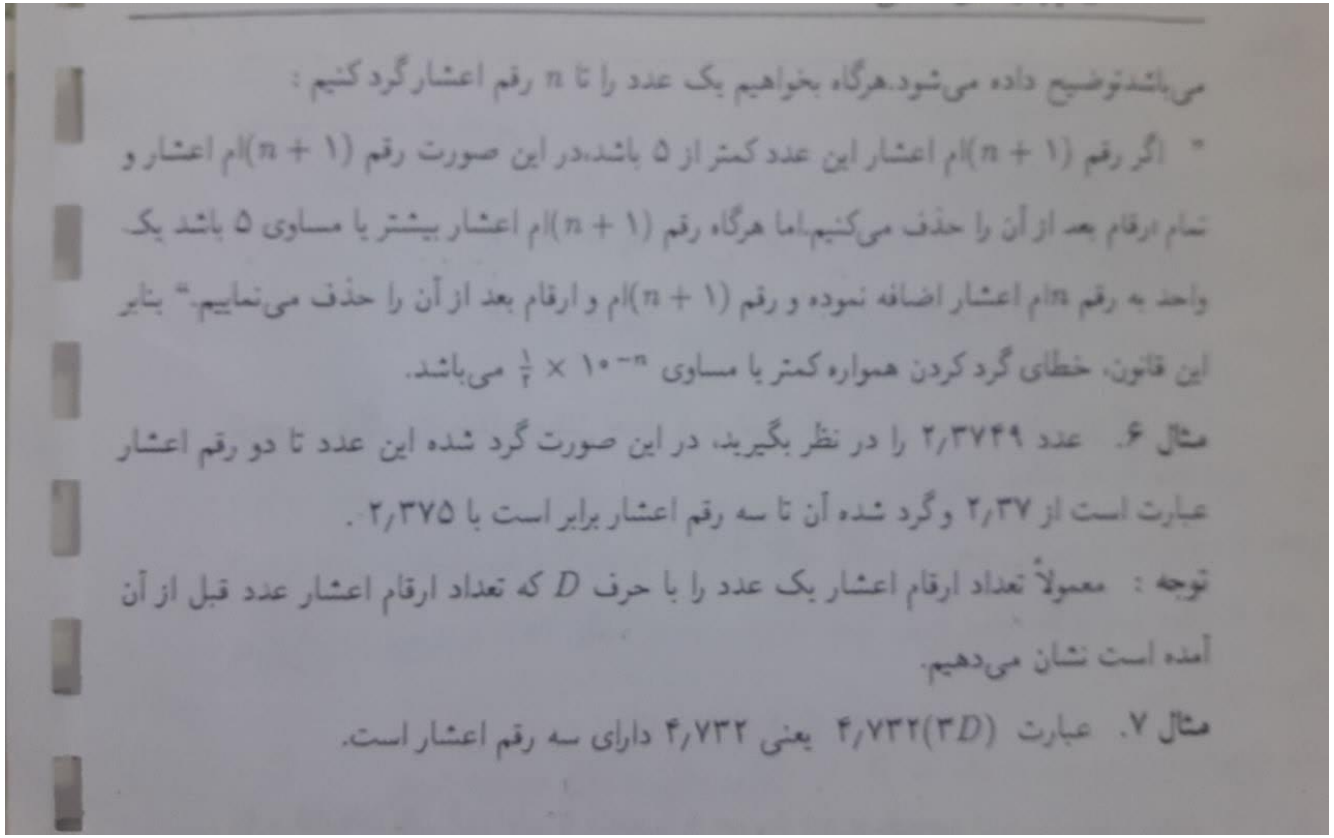
$$e(a)=|A-a|$$

توجه : برای عدد Aدو حالت وجود دارد

الف) عددAمعلوم است در این صورت خطای مطلق از فرمول بالا بدست می اید

ب) عدد A معلوم نیست بنابرین خطای مطلق از فرمول بالا قابل محاسبه نیست بنابرین یک حد بالا برای خطای مطلق قابل محاسبه است

خطای ناشی از گرد کردن تا nرقم اعشار : همواره کمتر از $\frac{1}{2} * 10^{-n}$



می‌باشدتوضیح داده می‌شود.هرگاه بخواهیم یک عدد را تا n رقم اعشار گرد کنیم :

" اگر رقم $(n+1)$ام اعشار این عدد کمتر از ۵ باشد،در این صورت رقم $(n+1)$ام اعشار و تمام ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم.اما هرگاه رقم $(n+1)$ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد یک واحد به رقم nام اعشار اضافه نموده و رقم $(n+1)$ام و ارقام بعد از آن را حذف می‌نماییم." بنابر این قانون، خطای گرد کردن همواره کمتر یا مساوی $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$ می‌باشد.

مثال ۶. عدد ۲٫۳۷۴۹ را در نظر بگیرید، در این صورت گرد شده این عدد تا دو رقم اعشار عبارت است از ۲٫۳۷ و گرد شده آن تا سه رقم اعشار برابر است با ۲٫۳۷۵ .

توجه : معمولاً تعداد ارقام اعشار یک عدد را با حرف D که تعداد ارقام اعشار عدد قبل از آن آمده است نشان می‌دهیم.

مثال ۷. عبارت ۴٫۷۳۲(۳D) یعنی ۴٫۷۳۲ دارای سه رقم اعشار است.

تقریب نقصانی و اضافی

تعریف : اگرaتقریبی از A باشد در ان صورت

الف) اگر a<Aباشد انگاه aتقریب نقصانی وa>A باشد انگاه aرا تقریب اضافی مینامند

مثال : یک تقریب نقصانی برای $\sqrt{2}$بیاورید

تقریب اضافی $\sqrt{2} < 1.42$

تقریب نقصانی $\sqrt{2} > 1.41$

خطای مطلق حدی

خطای مطلق حدی یک عدد تقریبی a :عددی است خطای مطلق ان کوچیک تر نباشد که با e_a نشان میدهیم بنابراین

$$e(a) \leq e_a$$

مثال : عدد $A = \frac{2}{3}$ در نظر بگیرد .یک تقریب اضافی - یک تقریب نقصانی -خطای مطلق و خطای مطلق حدی را بدست آورید

جواب :تقریب نقصانی $a = .67$ در این حالت اگر خطای حدی را $e_a = .004$

بنابراین خطای مطلق $e(a) = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300} = .00333$ زیرا $e(a) \leq e_a$

تقریب اضافی $a = .66$ در این حالت اگر خطای حدی را $e_a = .01$

بنابراین خطای مطلق $e(a) = \left|\frac{2}{3} - \frac{66}{100}\right| = \frac{2}{300} = .006666$ زیرا $e(a) \leq e_a$

نکته : هرگاه e_a خطای مطلق حدی a بعنوان تقریبی از A باشد آنگاه داریم

$$E(a)=|A-a| \leq e_a$$

بنابرین

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

نا مساوی فوق بصورت

$$A = a \pm e_a$$

مثال : اگر $A=1.324 \pm .003$ در این صورت

$$1.321=1.324 - .003 \leq A \leq 1.324 + .003 = 1.327$$

خطای نسبی : خطای نسبی Aرا با $\delta(a)$نمایش می دهیم داریم

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{e_a}{|A|}$$

تمرین : هرگاه $A = \frac{2}{3}$ و $a = 0.67$ خطای نسبی را بدست اورید

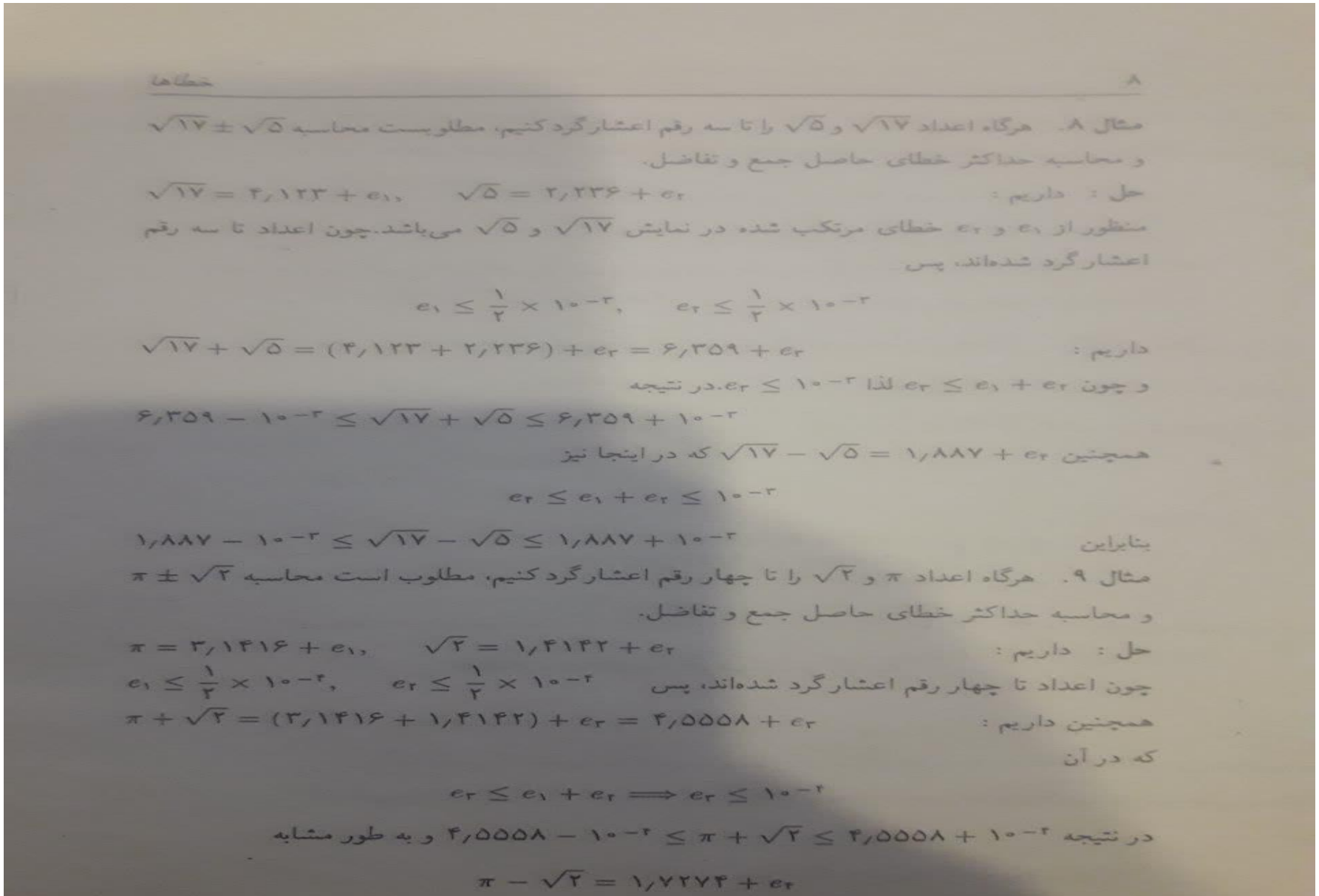
خطای چهار عمل اصلی

هرگاه a,bتقریب های از A,B باشند و این اعداد همگی مثبت باشند و e_aخطای مطلق حدی a و e_b خطای مطلق حدی b آنگاه

الف) خطای حاصل جمع : خطای مطلق حدی C=A+B به صورت $e_c \leq e_a+e_b$

ب) خطای تفاضل : خطای مطلق حدی C=A-B به صورت $e_c \leq e_a+e_b$

مثال



۸ خطاها

مثال ۸. هرگاه اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، مطلوبست محاسبه $\sqrt{۱۷} \pm \sqrt{۵}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم : $\sqrt{۱۷} = ۴٫۱۲۳ + e_۱, \quad \sqrt{۵} = ۲٫۲۳۶ + e_۲$

منظور از $e_۱$ و $e_۲$ خطای مرتکب شده در نمایش $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ می‌باشد. چون اعداد تا سه رقم اعشار گرد شده‌اند، پس

$$e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}, \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

داریم : $\sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} = (۴٫۱۲۳ + ۲٫۲۳۶) + e_۳ = ۶٫۳۵۹ + e_۳$

و چون $e_۳ \le e_۱ + e_۲$ لذا $e_۳ \le ۱۰^{-۳}$. در نتیجه

$$۶٫۳۵۹ - ۱۰^{-۳} \le \sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} \le ۶٫۳۵۹ + ۱۰^{-۳}$$

همچنین $\sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} = ۱٫۸۸۷ + e_۴$ که در اینجا نیز

$$e_۴ \le e_۱ + e_۲ \le ۱۰^{-۳}$$

بنابراین $۱٫۸۸۷ - ۱۰^{-۳} \le \sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} \le ۱٫۸۸۷ + ۱۰^{-۳}$

مثال ۹. هرگاه اعداد π و $\sqrt{۲}$ را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه $\pi \pm \sqrt{۲}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم : $\pi = ۳٫۱۴۱۶ + e_۱, \quad \sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲ + e_۲$

چون اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند، پس $e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}, \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$

همچنین داریم : $\pi + \sqrt{۲} = (۳٫۱۴۱۶ + ۱٫۴۱۴۲) + e_۳ = ۴٫۵۵۵۸ + e_۳$

که در آن

$$e_۳ \le e_۱ + e_۲ \Longrightarrow e_۳ \le ۱۰^{-۴}$$

در نتیجه $۴٫۵۵۵۸ - ۱۰^{-۴} \le \pi + \sqrt{۲} \le ۴٫۵۵۵۸ + ۱۰^{-۴}$ و به طور مشابه

$$\pi - \sqrt{۲} = ۱٫۷۲۷۴ + e_۴$$

ج) خطای حاصل ضرب :هرگاه a,bتقریب های از A,B باشند و این اعداد همگی مثبت باشند و e_aخطای مطلق حدی aو e_b خطای مطلق b آنگاه خطای مطلق حدی C=A.B به صورت

$$e_c \leq \text{b } e_a + a e_b$$

مثال :عبارت $C = \pi\sqrt{2}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل ضرب را بدست آورید

جواب : با چهار رقم اعشار $\sqrt{2} = 1.4142 + e_1$ که در آن $e_1 \leq \frac{1}{2} * 10^{-4}$ و

$\pi = 3.1416 + e_2$ که در آن $e_2 \leq \frac{1}{2} * 10^{-4}$ بنابراین

$$C = \pi\sqrt{2} = (3.1416 * 1.4142) + \text{e}$$

که در آن $e \leq (3.1416 * e_1 + 1.4142 * e_2) = .0002 + .0001 = .0003$

خطای محاسبه فرمول ها و توابع

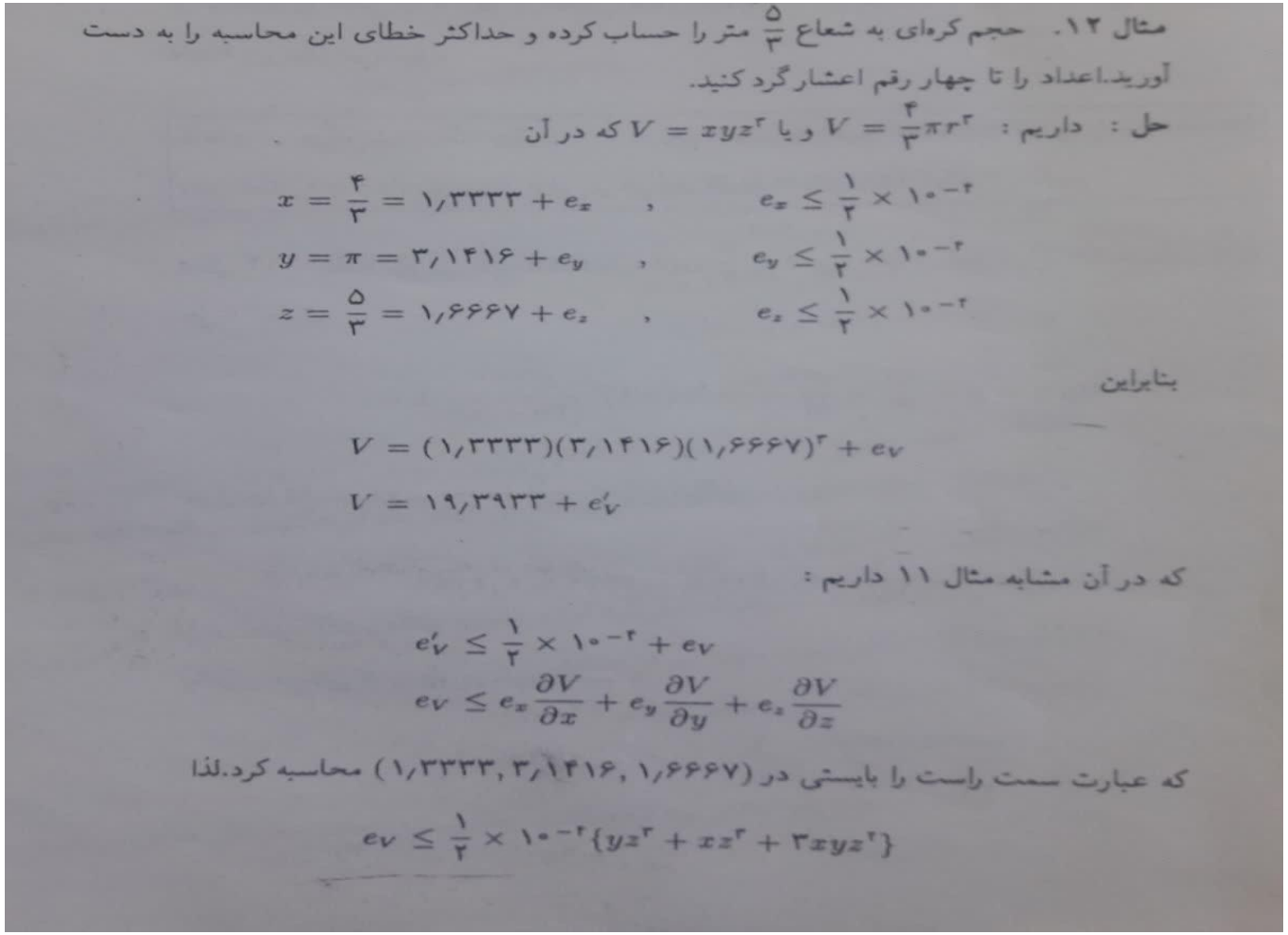
هر تابع n متغییره به صورت $w = f(x,y,z, \dots .)$ داشته باشیم و بخواهیم تابع رادر نقاط $(A,B,C, \dots \dots) = (a + e_1, b + e_2, c + e_3, \dots \dots)$ حساب کنیم داریم

$$w = f(A,B,C, \dots \dots) = f(a,b,c, \dots .) + e_f$$

که در آن

$$e_f \leq e_1 * \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 * \frac{\partial f}{\partial y} + e_3 * \frac{\partial f}{\partial z} + \dots \dots$$

مثال :حجم کره ای به شعاع $\frac{5}{3}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را تا چهار رقم اعشار بدست آورید



مثال ۱۲. حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۵}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را به دست آورید.اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل : داریم : $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و یا $V = xyz^۲$ که در آن

$$x = \frac{۴}{۳} = ۱٫۳۳۳۳ + e_x \quad , \quad e_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$y = \pi = ۳٫۱۴۱۶ + e_y \quad , \quad e_y \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$z = \frac{۵}{۳} = ۱٫۶۶۶۷ + e_z \quad , \quad e_z \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین

$$V = (۱٫۳۳۳۳)(۳٫۱۴۱۶)(۱٫۶۶۶۷)^۲ + e_V$$

$$V = ۱۹٫۳۹۳۳ + e'_V$$

که در آن مشابه مثال ۱۱ داریم :

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_V$$

$$e_V \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(۱٫۳۳۳۳, ۳٫۱۴۱۶, ۱٫۶۶۶۷)$ محاسبه کرد.لذا

$$e_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}\{yz^۲ + xz^۲ + ۳xyz^۲\}$$

مقدار سمت راست به ازای $x = ۱٫۳۳۳۳$، $y = ۳٫۱۴۱۶$ و $z = ۱٫۶۶۶۷$ به صورت زیر خواهد بود :

$$e_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}\{۱۴٫۵۴۵۳ + ۶٫۱۷۳۱ + ۳۴٫۹۰۷۲\}$$

$$e_V \leq ۰٫۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + ۰٫۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵} + ۰٫۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۰٫۰۰۲۸۵$$

و در نتیجه $V = ۱۹٫۳۹۳۳ \pm ۰٫۰۰۲۸۵$

تمرین

مجموعه مسائل فصل اول.

۱- هرگاه a تقریبی از A باشد، خطای مطلق a را به عنوان تقریب A در حالتهای زیر حساب کنید.

الف. $A = \frac{۱}{۳۰۰}$ و $a = ۰/۰۰۳$

ب. $A = ۲/۵۴۷۵$ و $a = ۲/۵۴۸$

پ. $A = ۲/۱۰۰۰۰۰۷$ و $a = ۲/۱۰۰$

ت. $A = \frac{۱}{۳}$ و $a = ۰/۳۳$

جواب. الف. $\frac{۱}{۳۰۰۰}$ ب. $۰/۰۰۰۵$ پ. ۷×۱۰^{-۶} ت. $\frac{۱}{۳۰۰}$

۲- یک کران خطای حدی را برای تقریب a از عدد A در هر یک از حالتهای مسأله ۱ ارائه نمایید.

جواب. الف. ۵×۱۰^{-۴} ب. ۵×۱۰^{-۴} پ. ۵×۱۰^{-۵} ت. ۵×۱۰^{-۴}

۳- هرگاه π و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه $\pi\sqrt{۵}$ و $\frac{\pi}{\sqrt{۵}}$ و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در هر حالت.

جواب. $\pi\sqrt{۵} \simeq ۷/۰۲۶$ با حداکثر خطای $۰/۰۰۳۲$

$\frac{\pi}{\sqrt{۵}} \simeq ۱/۴۰۴$ با حداکثر خطای $۰/۰۰۲۳$

۴- هرگاه x و y را تا چهار رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه حداکثر خطای مرتکب

تمرین :

شده در $x \pm y$ و xy که $x = \sqrt{۱۱}$ و $y = \pi$.

جواب. $۱۰^{-۳}$ برای جمع و تفریق و ۴×۱۰^{-۳} برای ضرب .

۵- حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۷}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای آن را بنویسید.(با سه رقم اعشار).

جواب.$V = ۵۳٫۱۸۴$ و حداکثر خطا ۰٫۰۶۴.