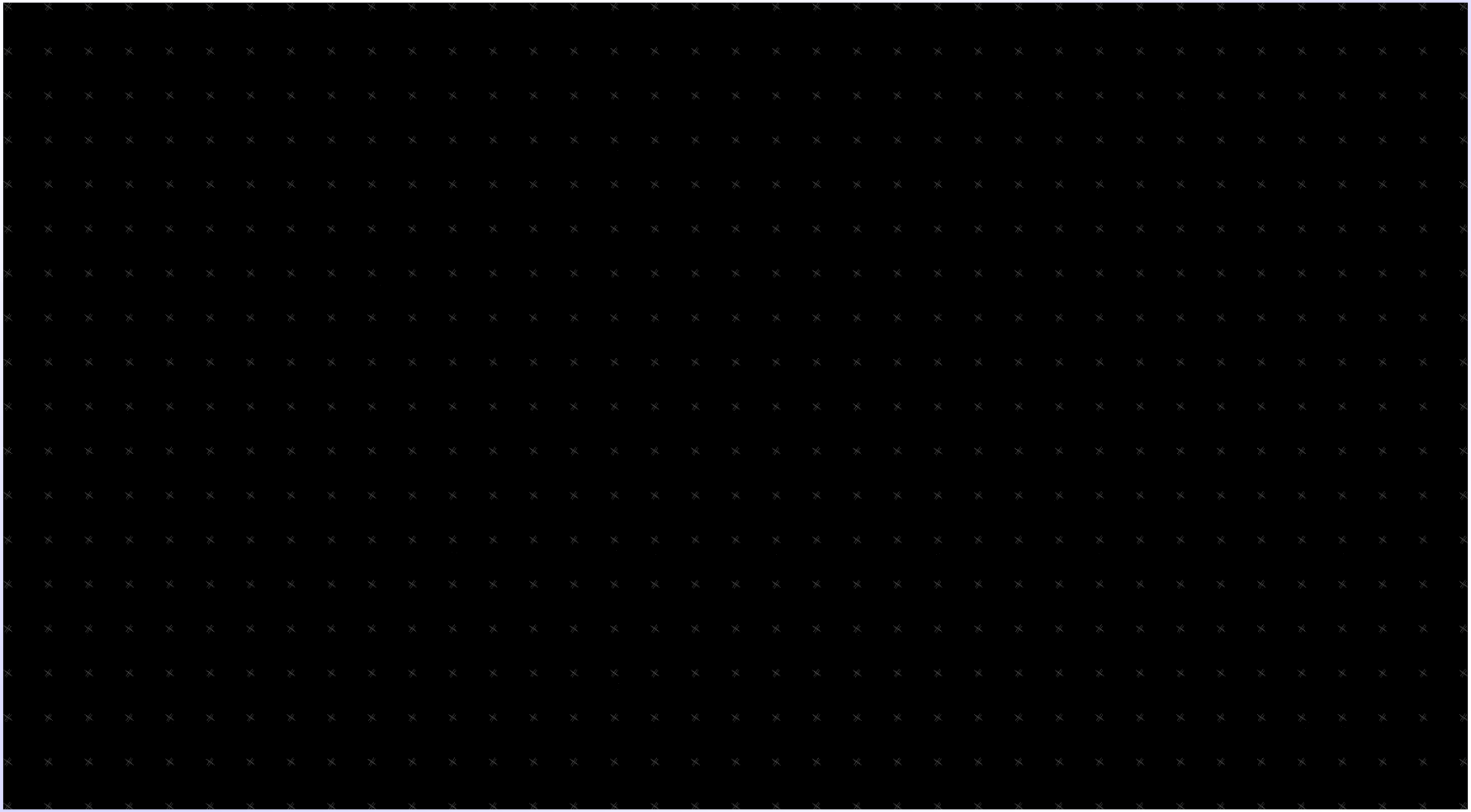

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فنی و حرفه ای



نـــام درس: محاسبات عددی

تعداد واحد: ۲ واحد

منابع درس: محاسبات عددی

تهیه و تدوین: حمید مرادیان

فهرست

فصل اول

خطاها

مقدمه

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی با منشاء این خطاها ، نحوه بروز آنها و کنترل آنها موضوع این فصل است.

هدفهای کلی

1) شناخت منابع خطا و تشخیص آنها در هر مسئله

2) بررسی منابع خطا و راه های کمینه سازی آنها

3) شناخت انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب

4) جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی

5) شناخت روش های محاسبه پایدار و ناپایدار

6) محاسبه مقدار تقریبی توابع.

هدفها:

پس از مطالعه این فصل باید بتوانیم :

- منشا خطاها را در یک مسئله واقعی تعیین کنیم
- بسط اعداد را در مبنا های مختلف بنویسیم و از بسط اعشاری یک عدد، تقریبی مناسب انتخاب کنیم.
- انواع خطاها را بشناسیم و ارتباط آنها را با دقت یک تقریب بدانیم
- یک محاسبه عملی را چنان ترتیب و به انجام برسانیم که رشد خطاها حداقل باشد.
- محاسبه توابع و سری ها را با حداقل خطا و عملیات انجام دهد.

با توجه به اینکه تعدادی محدود از ارقام بســــــط هر عدد در مبنای دو قابل نگهداری در حافظه وسایل محاسباتی است، نتیجه می گیریم که تقریبا تمامی اعداد غیر صحیح به طور تقریبی در حافظه این وسایل ذخیره می شوند و این یکی از ضعفهای مهم این وسایــــــل است که در عمل باعث مشکلات زیادی می شود .

بعدا خواهیم دید که خطای جزئی که در ذخیره اعداد پیش می آید گاهی سبب به دست آوردن جوابهای غیر قابل قبــــول برای بعضی مسائل می شود. یکی از مباحث بسیار مهم در آنالیز عددی نیز پیش بینی اثرات خطای نمایش اعداد در نتایج عددی است. در قسمتهـــــای بعدی این فصل به برخی از این اثرات اشاره خواهیم کرد.

۱-۴ ارقام با معنا

در ریاضیات اعداد زیر با هم مساوی اند. ۷/۴۰۰ , ۷/۴۰ , ۷/۴

اما در علومی که با اندازه گیری سر و کـــــار دارند ، مانند فیزیک، شیمی و ... چنین نیست. اگر گفته شود طولـــی را اندازه گرفتیم و نتیجـــه اندازه گیری ۷/۴۰ متر بوده است. این گفته بدان معناست که وسیله اندازه گیری دقتی تا حد سانتیمتر داشته و حداکثر خطا ۰/۵ سانتیمتر است. اگر نتیجه اندازه گیری ۷/۴۰۰ متر بود معلوم مـــی شد که واحد اندازه گیری دقتی درحد میلیمتر داشته و حداکثر خطا ۰/۵ میلیمتر بوده است. از این رو ، صفرهای جلـــوی این عدد را، که نشانه دقت اندازه گیری هستند، صفرهای بامعنا میگویند

اکنون تعریفی نسبتا دقیق از ارقام با معنا برای یک عدد ارائه می کنیم.

۱-۴-۱ نمایش علمی اعداد

فرض کنید A عددی مخالف صفر باشد . واضح است که A را همواره می توان به صورت:

$$A = a \times ۱۰^{b}$$

نوشت که در آن b عددی صحیح است و

$$۱ \leq |a| < ۱۰$$

در این صورت می گوییم A بصورت علمی نمایش داده شده است. در این

نمایش a را مانتیس و b را نمای عدد A می نامند.

۱-۴-۲ تعریف

اگر عددی اعشاری باشد و $1 \le |a| < 10$، در این صورت ارقام با معنای a عبارت اند از ارقام مخالف صفر a، بین این ارقام و صفرهایی که جلوی عدد به منظـــــورنمایش دقت قرار دارند.

ارقام با معنای عدد مخالف صفر A ، همان ارقام با معنای مانتیس A تعریف می شود.

۱-۴-۳ مثال

الف) اگر $A = ۲۱۳/۷۶$ آنگاه $\mathbf{A = ۲/۱۳۷۶ \times ۱۰^{۲}}$ و تعداد ارقام بامعنای A پنج است

ب) اگر $A = ۰/۰۰۷۲۶$ آنگاه $\mathbf{A = ۷/۲۶ \times ۱۰^{-۳}}$ و A دارای ۳ رقم با معناست.

پ) اگر $I = ۲۰۰۰$ متر آنگاه $\mathbf{I = ۲/۰۰۰ \times ۱۰^{۳}}$ متر و I دارای ۴ رقم با معناست.

ت) اگر d =78 کیلو متر آنگاه $\mathbf{d = ۷/۸ \times ۱۰^{۴}}$ متر و d دارای دورقم با معناست.

۱-۵ انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم

در بخشهای ۱-۲ و ۱-۳ نشان داده شد که بسط اکثر اعداد دارای بی نهایت رقم است. ضمنا، می دانیم که وسایل محاسباتی از نظر نگهداری این ارقام محدودیت دارند. از این رو، باید تعدادی متناهی ، که به نوع وسیله محاسباتی ، قدرت آن و دقت لازم بستگی دارد، از ارقام بسط اعشاری یا دودویی عدد انتخاب کنیم . این کار به دو روش انجام می گیرد.

۱-۵-۱ روش قطع کردن

در این روش، با توجه به تعداد ارقامی که می توانیم یا می خواهیم نگهــــــداری کنیم. بسط عدد را از رقم معینی قطع می کنیم. این رقم را اولین رقم ناخواسته می نامیم. بنابراین در روش قطع بسط عدد اعشاری، یا دودوئی، عدد را از اولین رقم ناخواسته قطع می شود. مثلاً، اعداد زیر تا دو رقم اعشار (یا تا D ۲) قطع شده اند.

$$\pi = ۳/۱۴(۲D) \quad ,e = ۲/۷۱(۲D) \quad ,\frac{۵}{۳} = ۱/۶۶(۲D)$$

می توان گفت که اعداد سمت راست تساویها ی بالا، قطع شده اعداد سمت چپ تا 3 رقم با معنا هستند $(3S)$

۱-۵-۲. روش گرد کردن

در این روش با توجه به مقدار اولین رقم ناخواسته، تقریبی از عدد را بدست می آوریم. مثلا در گرد کردن تا دو رقم اعشار :

$$\text{۲,۳۴۷۶} = \text{۲/۳۵}(\text{۲}\mathbf{D}), \text{۳,۷۸۳۰} = \text{۳,۷۸}(\text{۲}\mathbf{D})$$

یعنی، اگر اولین رقم ناخواسته بزرگتر از ۵ باشد یک واحد به رقـــــم قبل از آن اضافه و عدد را قطع می کنیم، و اگر اولین رقم ناخواسته کمتر از ۵ باشد عدد را بدون تغییر قطع می کنیم. اما، وقتی اولین رقم ناخواسته ۵ باشد به گونه دیگری عمل می کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$\text{۳,۶۸۵۰۰۰۱۰۶} = \text{۲,۶۹}(\text{۲}\mathbf{D})$$

(توجه کنید که در مثال بالا اولین رقم ناخواسته ۵ است و بعد از آن رقم مخالف صفر وجود دارد)

(رقم قبل از ۵ فرد است)

$$17.835 = 17.84(2D)$$

(رقم قبل از ۵ زوج است)

$$2.465 = 2.46(2D)$$

علت اصلی در نحوه گرد کردن اعداد در دو حالت اخیر آن است که مقادیری که از اعداد کم یا به آنها اضافه می شود در عمل همدیگر را خنثی می کنند. بعبارت دیگر، در یک مسئله با محاسبات زیاد، احتمال وقوع اعداد اعشاری با رقم سوم اعشار ۵ و رقم دوم اعشار زوج یا فردیکسان است، از این رو میانگین خطای گرد کردن متناظر با آنها صفر است.

۱-۵-۳ گرد کردن تا n رقم اعشار

به طور کلی اگر $\mathbf{A \neq ۰}$ دارای بسط اعشاری زیر باشد

$$\mathbf{A = a_۱ a_۲ \ldots a_m / b_۱ b_۲ \ldots b_n b_{n+۱} \ldots}$$

و بخواهیم گرد شده A را تا n رقم اعشار به دست می آوریم چنین عمل می کنیم:

I: اگر $\mathbf{b_{n+۱} > ۵}$ یک واحد به $\mathbf{b_n}$ اضافه و عدد را از $\mathbf{b_{n+۱}}$ قطع می کنیم

II. اگره $\mathbf{b_{n+۱} < ۵}$ عدد را از $\mathbf{b_{n+۱}}$ قطع می کنیم.

III. اگر $\mathbf{b_{n+۱} = ۵}$ و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشد. مانند (I) عمل می کنیم.

IV. اگر $\mathbf{b_{n+۱} = ۵}$ و بعد از این رقم، رقم دیگری نباشد، یا فقط صفر باشد، در صورتی که $\mathbf{b_n}$ فرد باشد مانند (I) و در غیر اینصورت مانند (II) عمل می کنیم.

۱-۵-۴ مثال

۱- در زیر گرده شده، چند عدد را ملاحظه کنید

$$\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۷(۳D),\sqrt{۲}=۱/۴۱۴(۳D),۳/۹۹=۴/۰۰(۲D)$$

$$\frac{۲۲}{۷}=۳/۱۴(۳S)\quad,\pi=۳/۱۴۲(۴S)\quad,\sqrt{۳}=۲(۱S)\quad,۱/۹۹=۲/۰(۲S)$$

2- اگر a گرد شده $\frac{۲}{۳}$ و $\mathbf{b}$ قطع شده دو رقم اعشار آن باشند داریم:

$$\mathbf{a}=۰/۶۷\quad,\quad\left|\frac{۲}{۳}-\mathbf{a}\right|=\frac{۱}{۳۰۰}$$

$$\mathbf{b}=۰/۶۶\quad,\quad\left|\frac{۲}{۳}-\mathbf{b}\right|=\frac{۲}{۳۰۰}$$

یعنی، خطای قطع کردن تا دو برابر خطای گرد کردن است. در عمل بیشتر از گرد کردن استفاده می شود. (هر چنـــد قطع کردن ساده تر است و در اکثر ماشین حسابها از آن استفاده می شود).

۱-۵-۵ نتیجه(مهم)

اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد، با توجه به نحوه گرد کردن داریم:

$$|A-a| \leq ۵\times۱۰^{-(n+۱)}$$

نامساوی بالا نشان می دهد که هر چه n بزرگتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود، به همین دلیل است که هر وقت دقت زیاد مورد نظر باشد از دقت مضاعف استفاده می شود (که در این صورت دو کلمه از حافظه برای ذخیره یک عدد اعشاری به کار می رود).

با توجه به آنچه گفته شد برای انتخاب تقریبی از یک عـــدد معلوم، ابتدا بسط اعشاری آن را به دست می آوریم و سپس گرد شده آن را، تا هـــر تعداد رقم با معنا که می توانیم نگهداری با ذخیره کنیم، معین می کنیم. در کامپیوترهای متوسط معمولا هفت تا هشت رقم با معنا از مانتیس اعداد نگهـــداری می شود (البته دقت معمولی) . اگر دقت مضاعف به کار رود تا ۱۷ رقـــم با معنای بسط اعشاری اعداد قابل ذخیره است.

۱-۶ انواع خطا

در آنالیز عددی معمولا تقریبهایی از یک مجهول در دست است ولازم است دقت این تقریبها و رفتار آنها مورد بررسی قرار گیرد.

۱-۶-۱ تعریف

اگر a تقریبی از A باشد و قرار دهیم

$$e(a) = |A - a|$$

آنگاه $e(a)$ را خطای مطلق a نامند.

۱-۶-۲ مثال

۱- فرض کنید $a_n = \frac{n+۱}{n}$. خطای a_n بعنوان تقریبی از عدد یک چقدر است؟

$$e(a_n) = \left|۱ - \frac{n+۱}{n}\right| = \frac{۱}{n}$$

مشاهده می شود که هر چه n بزرگتر اختیار شود $\frac{۱}{n}$ کوچکتر خواهد و در نتیجه a_n به یک نزدیکتر خواهد شد. اگر بخواهیم خطای a_n از، مثلا ، ۰/۰۰۱ کوچکتر باشد کافی است قرار دهیم:

$$\frac{۱}{n} < ۰/۰۰۱$$

که از آن نتیجه می شود $n > ۱۰۰۰$ اولین n که در نامساوی اخیرصدق می کند ۱۰۰۱است که به ازای آن

$$a_n = \frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۱} = ۱/۰۰۰۹۹۹(۶D)$$

اما همیشه وضع به گونه ای نیست که عدد A را داشته باشیم. معمولا A،مجهول است و یا حتی در حالت معلوم بودن $e(a)$ به راحتی قابل بیان نیست.

۲- می دانیم که ۱٫۴۱ تقریبی از $\sqrt{۲}$ است. خطای مطلق ۱٫۴۱ چیست؟ اگر بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ را، با استفاده از یک ماشین حساب، بنویسیم یعنی:

$$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳...$$

خواهیم داشت

$$e(۱٫۴۱) = \left|\sqrt{۲} - ۱٫۴۱\right| = \sqrt{۲} - ۱٫۴۱$$

$$e(۱٫۴۱) = ۰/۰۰۴۲۱۳۵۶۲...$$

مشاهده می شود که $e(۱/۴۱)$به سادگی قابل بیان نیست و همان $\sqrt{۲}-۱/۴۱$ بیان ساده تر و دقیقتری از آن است. حال فرض کنید که حدود $\sqrt{۲}$ را بدانیم، مثلا، بدانیم که

$$۱/۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۵$$

در این صورت:

$$۰/۰۰۴ < \sqrt{۲} - ۱/۴۱ < ۰/۰۰۵$$

بنابراین،

$$e(۱/۴۱) < ۰/۰۰۵$$

بدیهی است که ۰/۰۰۵ یک کران بالا برای خطای ۱/۴۱ است و تا حد زیادی مقدار۱/۴۱ نزدیکی (یا دقت) را به $\sqrt{۲}$نشان می دهد.

در اکثر روشهای آنالیز عددی حدود جواب ، یعنی کران بالا و پایینی برای جواب، قابل محاسبه است که از آنجا کران بالایی ، طبق توضیحات بالا، برای $e(a)$,به دست می آید.

حال این سوال مطرح است که(برای مطالعه بیشتر)

«آیا خطای مطلق یک تقریب ، دقت آن تقریب را کاملا مشخص می کند؟» مطالب زیر را مطالعه و به سوالات مربوط پاسخ دهید تا جواب سوال بالا مشخص شود.

الف) دو صندوقدار بانک را در نظر بگیرید که یکی با رد و بدل کردن، مثلاً، یک میلیون تومان ، صد تومان کم، و دیگری با رد و بدل کردن پانصد هزار تومان ، صد تومان زیاد آورده است! دقت کدام صندوقدار بیشتر بوده است؟

ب) دو ماشین نویس را در نظر بگیرید که یکی در تایپ دو صفحه ده کلمه و دیگری درتایپ ۲۰ صفحه ده کلمه غلط تایپ کرده است. دقت کدام ماشین نویس بیشتر بوده است؟

از مثالهای فوق چنین بر می آید که آنچـــــه دقت یک تقریب را معین می کند خطا در واحد کمیت است که هر چه کوچکتـــــــــر باشد تقریب بهتر (دقیقتر) است.

۱-۶-۶ تعریف

اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A باشد خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان می دهیم و آن عبارت است از خطا در واحد کمیت، یعنی،

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{A}$$

همانطور که دیده می شود ، A که معمولامقدار آن معلوم نیست، هم در صورت و هم در مخرج کسر موجود است، می توان یک کران بالا برای $\delta(a)$به دست آورد که A در آن نباشد.

۱-۷ ارقام با معنای درست یک تقریب(جهت مطالعه)

هر یک از اعداد زیر یک تقریب از عدد e هستند

۳ , ۲/۷ , ۲/۷۲ , ۲/۷۱۸ , ۲/۷۱۸۱

یکی از راههای تعیین دقت این تقریبها آن است که خطای نسبـــی آنها را حساب کنیم. اکنون این سوال مطرح است که آیا راه دیگری برای تعیین این اعداد وجود دارد؟ مثلا، با استفاده از تعداد ارقام آن یا خصوصیات دیگر؟ بدیهی است که تعداد ارقام با معنای یک تقریب موید دقت آن تقریب نیست. مثـــلا ، عدد ۳/۷۱۸۲۳۸ تقریبی از عدد e است که ۷ رقم با معنا دارد. آیا این عدد تقریب خوبـی از e است؟ آیا ۳ تقریب بهتری نیست؟ پس چگونه می توان با توجه به ارقام یک تقریب به دقت آن پی برد؟ اینجاست که پای مفهوم ارقام با معنای درست به میان مـــی آید. این مفهوم از گرد کردن یک عدد ناشی شده است .

قبل از ارائه تعـــــریف دقیق ارقام با معنای درست هر تقریب ، مثالی می آوریم.

۱-۷-۱ مثال

فرض کنید $\mathbf{A}=۸/۰۰۰$ و $\mathbf{a}=۷/۹۹۷$ و $\mathbf{a'}=۸/۰۸$ مشاهده می شود که $\mathbf{a'}$ درست دو رقم، مساوی با ارقام A دارد (با حفـــظ ارزش هر رقم) . امـــا هیچیک از ارقام a مساوی ارقـــام A نیست . آیا مـــی توان گفت که ارقام درست a' بیشتر از ارقـــام درست a است؟ خواهیـــم دید که نـــه.

مفهوم ارقام با معنای درست هر تقریب رابطه تنگاتنگ با دقت آن تقریب دارد.

در اینجا

$$\mathbf{e(a)=۰/۰۰۳} \quad , \quad \mathbf{e(a')=۰/۰۸}$$

و در واقع باید تعداد ارقام درست بیشتری داشته باشد! اما، تعداد ارقام بامعنای درست چگونه به دست می آید؟ به بیان نادقیق به صورت زیر

اگر a را تا سه رقم با معنا گرد کنید عدد A حاصل می شود . از این رو، a سه رقم با معنای درست دارد. اگر$\mathbf{a'}$ را تا رقم یکان گرد کنید A حاصل می شود (توجه کنید که حتی گرد شده $\mathbf{a'}$ تا یک رقم اعشار ، به ۱/۸ منجر می شود که مساوی A نیست).

یعنی، a' تنها یک رقم با معنای درست دارد (هر چند که دو رقم آن دقیقا در بسط A ملاحظه می شود)

۸-۱ تولید وانتشار خطا

همانطور که می دانید صورت علمی نمایش هر عدد اعشاری مخالف صفر

$$a \times 10^{b}$$

است که در آن،

$$1 \leq |a| < 10$$

این نمایش را نمایش ممیز سیار نیز می نامند (با تغییر نما، ممیز در بین ارقام a تغییر محل می دهد). محاسبه با این اعداد را نیز حساب ممیز سیـــار می نامند. قبل از این که نحوه تولید و انتشـــــار خطا را توضیـــح دهیم لازم است درمورد چگونگی انجام چهـــار عمل اصلـــی روی اعداد ممیز سیار مطالبی را بیان کنیم.

برای سادگی بحث فرض کنید فقط سه رقـــــم با معنا از ارقام مانتیس هر عدد اعشاری ، یعنی a، را می توانیم نگه داریم؛ این را حساب ممیـــز سیار سه رقمی نامند.

۱-۸-۱ حساب ممیز سیار

در اینجا اعمال اصلی بر اعداد ممیز سیار را بررسی می کنیم.

الف) جمع و تفریق

برای بدست آوردن حاصل جمع یا تفاضل دو عدد ابتدا نماها یکسان می شوند ، در صورت لزوم با افزایش نمای عدد کوچکتر، سپس حاصل عمل بدست می آید و سرانجام جواب حاصل بصورت علمی ، با مانتیسی که ۳ رقم با معنا دارد ، نوشته می شود.

مثلا

$$3/12\times10^{1}+8/34\times10^{1}=11/46\times10^{1}=1/146\times10^{2}\rightarrow1/15\times10^{2}$$

$$6/48\times10^{1}+1/45\times10^{-1}=6/48\times10^{-1}+0/0145\times10^{1}=6/4945\times10^{1}\rightarrow6/49\times10^{1}$$

$$3/56\times10^{-1}-2/67\times10^{-1}=0/89\times10^{-1}\rightarrow8/9\times10^{-2}$$

$$1/49\times10^{+1}-1/2\times10^{-1}=1/49\times10^{-1}-0/012\times10^{1}=1/478\times10^{1}\rightarrow1/48\times10^{1}$$

ب) ضرب

در ضرب دو عدد ممیز سیار، نماها با هم جمع و مانتیسها در هم ضرب می شوند. سپس نتیجه نهایی ، با گرد کردن، بصورت علمی نمایش داده می شود. مثلا،

$$\left[3/25\times10^{1}\right]\times\left[2/46\times10^{1}\right]=7/995\times10^{2}\rightarrow8/00\times10^{2}$$

$$\left[7/48\times10^{3}\right]\times\left[3/37\times10^{-2}\right]=25/2076\times10^{1}=2/52076\times10^{2}\rightarrow2/52\times10^{2}$$

ج) تقسیم

برای تقسیم دو عدد ممیز سیار، ابتدا تفاضل به دست می آید، سپس مانتیسها بر هم تقسیم شده و حاصل بصورت علمی نمایش داده می شود. مثلا،

$$\frac{5/43\times10^{1}}{4/55\times10^{2}} = 1/1934\ldots\times10^{-1} \rightarrow 1/19\times10^{1}$$

$$\frac{2/75\times10^{1}}{9/87\times10^{3}} = \circ/278622\ldots\times10^{-2} = 2/78622\ldots\times10^{-3} \rightarrow 2/79\times10^{-3}$$

مشاهده می شود که حتی اگر عوامل یک عمل دقیق باشند، نتیجه، معمولا، گرد شده حاصل دقیق است، خطایی که به این ترتیب وارد می شود خطای تولید شده نام دارد.

د) محاسبه عبارات

ممکن است در یک عبارت محاسباتی چهار عمل اصلی شرکت داشته باشند. در این صورت، عملیات همانند آنچه توضیح داده شدانجام می شود تا حاصل نهایی بدست آید .

$$\frac{6/18\times10^{1}+1/84\times10^{-1}}{\left(4/72\times10^{1}\right)\left(6/38\times10^{1}\right)}\rightarrow\frac{6/20\times10^{1}}{3/01\times10^{3}}=2/0598...\times10^{-2}\rightarrow2/06\times10^{-2}$$

در مثال بالا، مقادیر صورت و مخرج کسر دوم شامل خطاهای تولید شده هستند. این اعداد تقریبی نیز بر هم تقسیم می شوند و نتیجه نهایی باز هم شامل خطای تولید شده دیگری است. بدیهی است که خطاهای تولید شده در صورت و مخرج کسر دوم انتشار پیدا می کنند و روی مقدار جواب نهایی اثر می گذارند.

۱-۲-۸ تفاوتهای حساب ممیز سیار با حساب معمولی

در حساب ممیز سیار، با هر تعداد رقم که بتوان نگهداشت ، قوانین حساب معمولی نظیر وجود عضو بی اثر برای جمع ، شرکت پذیری ضرب یا جمع و ... عموما بر قرار نیستند. این موارد در مثالهای زیر بررسی می شود.

الف) در حساب ممیز سیار، مثلا، سه رقمی،هر عدد کوچکتر از 5×10^{-3} را که باعدد ۲/۷۵ جمع کنیم، عضو بی اثر خواهد بود، بعنوان مثال،

$$2/75+4\times10^{-3}=2/75\times10^{0}+0/004\times10^{0}=2/754\times10^{0}\rightarrow2/75$$

بنابراین ، در جمع اعداد ممیز سیار عضو بی اثر منحصر به فرد نیست.

$$2/75+4\times10^{-3}+3\times10^{-3}$$

ب) شرکت پذیری عمل جمع در اعداد ممیز سیار برقرار نیست. مثلا در محاسبه

داریم:

$$2/75+4\times10^{-3}=2/754\rightarrow2/75$$

$$2/75+4\times10^{-3}=2/754\rightarrow2/75$$

$$2/75+4\times10^{-3}=2/753\rightarrow2/75$$

بنابراین:

$$\left(2/75+4\times10^{-3}\right)+4\times10^{-3}\rightarrow2/750$$

اما،

$$4\times10^{-3}+4\times10^{-3}=7\times10^{-3}$$

و

$$2/75+7\times10^{-3}=2/75\rightarrow2/76$$

یعنی ، در حساب ممیز سیار سه رقمی، حاصل عبارات یکسان نیست.

$$\left(2/75+4\times10^{-3}\right)+3\times10^{-3},2/75+\left(4\times10^{-3}+3\times10^{-3}\right)$$

الف) جمع اعداد تقریبی

در حساب ممیز سیار ۳ رقمی داریم

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \cong 1/41+1/73=3/14$$

مشاهده می شود که تقریبی از $\sqrt{2}$با تقریبی از $\sqrt{3}$ جمع شـــــده است. اکنون می خواهیم معین کنیم که خطای ۱۴/۳ حداکثر چقدر است و چه ارتباطی با خطاهای ۴۱/۱ و ۷۳/۱ دارد. در حالت کلی داریم

۱-۸-۴ قضیه

و این اعداد جملگی مثبت باشند آنگاه B و A تقریبهایی از b و a اگر

$$e(a+b)<e(a)+e(b)$$

$$\delta(a+b)\leq \max\{\delta(a),\delta(b)\}$$

۱-۸-۵ نتیجه

حداکثر خطای a+b مجموع خطاهای aوb است و دقت a+b می تواند همانند نادقیقترین a و b باشد. از این رو، در اندازه گیری کمیتهایی که می خواهیم جمع کنیم ، بهتر است آنها را با یک واحد اندازه گیری کنیم.

ب) تفریق اعداد تقریبی

در مورد تفریق اعداد تقریبی به راحتی می توان نشان داد که

$$e(a-b) \le e(a) + e(b)$$

اما، بنا بر تعریف $\delta(a-b) \cong \dfrac{e(a-b)}{|a-b|}$ و اگر $|a-b|$

کوچک باشد خطای نسبی a-b می تواند بزرگ باشد ، که نتیجه a-b نادقیق خواهد بود.

۱-۸-۶ مثال:

اگر A و B نزدیک به هم باشند و هدف محاسبه $\frac{1}{A-B}$ ، با استفاده از حساب ممیز سیار، باشد خطا می تواند فاحش باشد. مثلا، با حساب ممیز سیار چهار رقمی:

$$C = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\pi} \cong \frac{1}{(1/414+1/732)-3/142}$$

$$= \frac{1}{0/004} = 250$$

در صورتی که ، اگر به جای اعداد موجود در کسر C تقریبهایی تا ۹ رقم اعشار قراردهیم و جواب را تا چهار رقم گرد کنیم خواهیم داشت

$$C = 214/1 \quad (4s)$$

فصل دوم : هدف های رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱- تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله را با روش مناسب تعیین کند .

۲- تقریبی از مقدار یک ریشه را با دقت وطلئب و به روش خواسته شده حساب کند .

۳- تقریبی از تمام ریشه های حقیقی یک معادله را با روش(های) مناسب محاسبه کند .

۴- اختلاف روشها را از نظر مطمئن بودن یا نبودن همگرایی و تعداد عملیات برای رسیدن به یک تقریب مناسب را بیان کند .

۵- تعداد و حدود ریشه های یک دستگاه ساده از معادلات دو مجهولی غیر خطی را تعیین و تقریبی از آنها را با دقت مطلوب حساب کند .

هدف های کلی

۱- ارائه نمونه هایی از مسائل کاربردی – اجتماعی که حل آنها منجر به حل یک معادله متعالی می شود .

۲- بررسی روشهای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله .

۳- بررسی روش های زیر برای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله .

الف) روش دوبخشی (یا تنصیف)

فصل دوم

حل معادلات غیر خطی

مقدمه

حل بسیاری از مسائل اجتماعی ، اقتصادی و علمی منجر به حل معادله ای به شکل (۱ . ۲

) $f(x)=0$ می شود .

منظور از حل معادله (1 . 2) تعیین عدد یا اعدادی است که مقدار تابع به ازای آنها صفر شود . اگر $f(a)=0$ آنگاه a را یک ریشه معادله (1 . 2) می نامند یا می گویند a یک صفر تابع f است . معادله (1 . 2) بر حسب نوع تابع f به چند دسته تقسیم می شود .

الف) تابع f یک چند جمله ای مانند $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

ب) روش نابه جایی

ج) روش نیوتن

ه) روش وتری (خط قاطع)

۴- بحث در واگرایی ، همگرایی و سرعت همگرایی روشها و بالاخره مقایسهٔ روشها .

۵ـ حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی دو مجهولی به دو روش تعمیم یافتهٔ نیوتن .

۲ـ۲ تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه ها

معمولا برای تعیین ریشه ای از یک معادله ، با دقت مطلوب ، لازم است که تقریبی از آن ریشه یا بازهٔ کوچکی که حاوی آن ریشه باشد را معلوم کرد .

در این بخش روشهای موجود برای تعیین تعداد و حدود تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله را مورد بررسی قرار می دهیم . دو روش برای این کار موجود است :

الف) رسم منحنی　　　　ب) جدول بندی مقادیر تابع

در بخش بعد دو روش را شرح می دهیم و نقاط قوت و ضعف هر یک را بیان می کنیم .

۲ـ۲ـ۱ رسم منحنی

در این روش منحنی

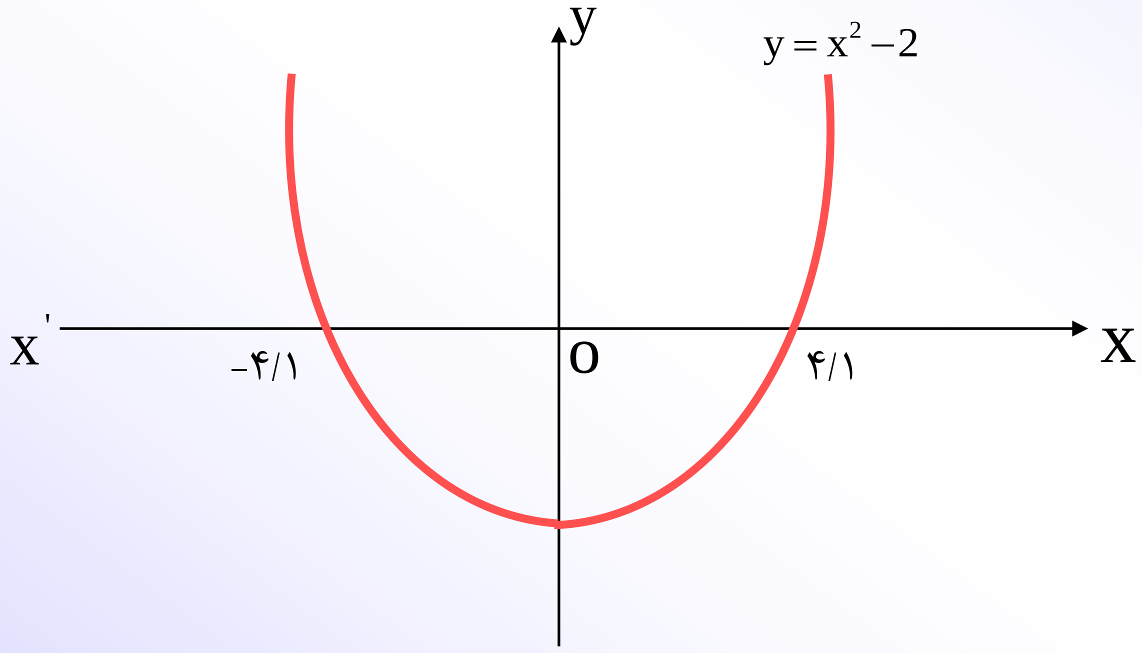
$$y=f(x)$$

را رسم می کنیم . اگر α ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ باشد داریم $f(\alpha)=0$ یعنی ، نقطهٔ $A(\alpha,0)$ روی منحنی $y=f(x)$ قراردارد . اما ، نقطهٔ A روی محـور $x\acute{o}x$ اسـت . پـس ، بایـد نقاط تلاقی منحنی بالا را با محور $x\acute{o}x$ تعیین کنیم . طـول ایـن نقـاط ریـــــشه هـای معادلهٔ $f(x)=0$ هستند . در حالـت کلـی رسـم منحـــــــنی $y=f(x)$، بـدون اسـتفاده از ماشین حساب و به کمک نقطه یابی ، به سادگی امکان پذیر نیست و بایـد ازکـامپیوتر و بسته هـای نـرم افـزاری مناسـب نظیـر DERIVE ، MATLAB یـاMATHEMATICAL استفاده کرد . با وجود این ، دانستن روشهای دستی نیز خـالی از فایـده نیسـت و اکثـر اوقات رفع نیاز می کنند .

۲ـ۲ـ۲ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادلهٔ $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را تعیین کنید .

منحنی $y = x^2 - 2$ را رسم می کنیم . مشاهده می شود که معادله دو ریشه دارد که تقریبا ۴/۱- و ۴/۱ هستند (شکل ۲ـ۲) .



شکل 2-2

آیا رسم منحنی y=f(x) همیشه به این سادگی است ؟ واضح است که نه .

مثلا ، منحنی

$$y= x + \cos x$$

را به این سادگی نمی توان رسم کرد .

بعضی اوقات می توان f(x) را به صورت تفاضل دو تابع ، که رسم آنها ساده

است ، نوشت . فرض کنید داریم

$$f(x) = f_1(x) - f_2(X) \qquad (5 . 2)$$

منحنی های زیر را رسم می کنیم

$$y_1 = f_1(x)$$
$$y_2 = f_2(x)$$

حال می گوییم اگر $f(\alpha)=0$ آن گاه

$$f_1(\alpha)-f_2(\alpha)=0$$

که از آن نتیجه می شود

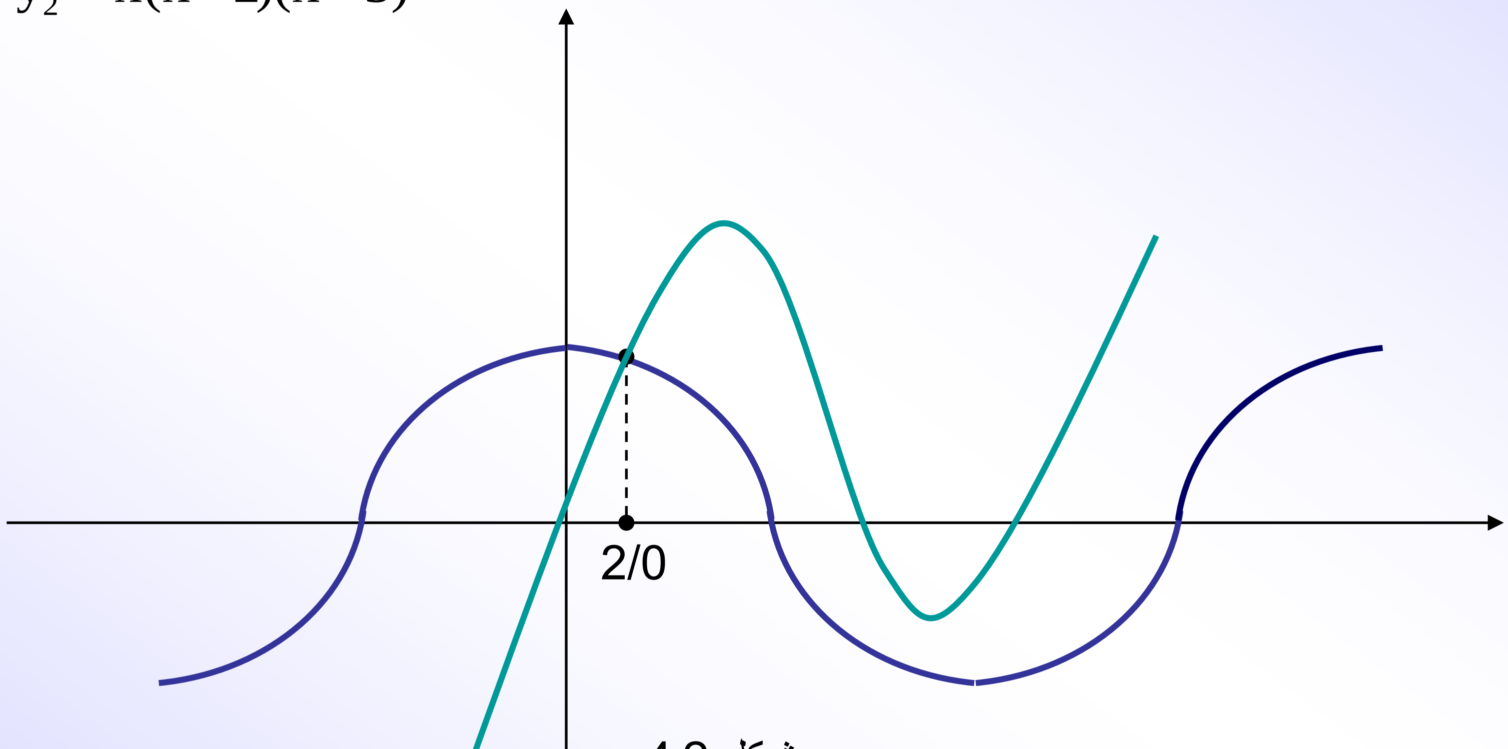
$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=\beta$$

یعنی نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ روی هر دو منحنی y_1 و y_2 قرار دارد . به عبارت دیگر ، α

طول نقطهٔ تقاطع منحنی های y_1 و y_2 است . از این رو ، منحنی ها را رسم

می کنیم و طول نقاط برخورد آنها را به دست می آوریم .

$y_2 = x(x-2)(x-3)$



شکل 4-2

شکل (۴ـ۲) نشان می دهد که معادله یک ریشه دارد که مقدار تقریبی آن ۲/۰

است . اما ، این تدبیر همیشه کارگر نیست . به مثال زیر توجه کنید .

۲ـ۲ـ۵ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادلهٔ زیر را تعیین کنید .

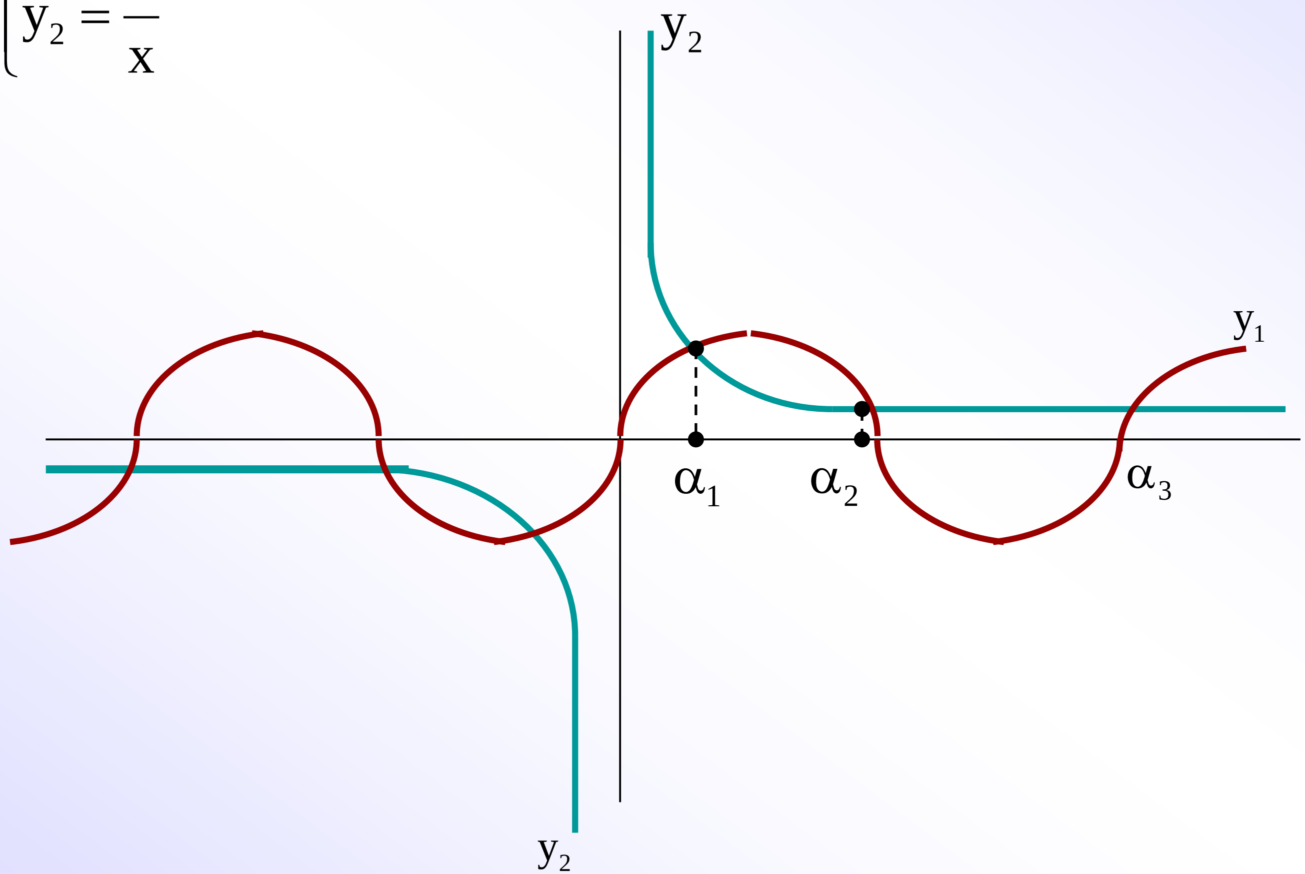
$$x \sin x - 1 = 0 \qquad (6 . 2)$$

در اینجا تابع $f(x)$ به شکل تفاضل دو تابع $f_1(x) = x \sin x$ و $f_2(x) = 1$ است ولی رسم تابع $y_1 = x \sin x$ ساده نیست . (منظور این است که به راحتی با تعیین دو سه نقطه قابل رسم نیست .) در این حالت می توان گفت که چون x=0 ریشهٔ معادله (۶ . ۲) نیست می توان طرفین آن را بر x تقسیم کرد و به دست آورد .

$$\sin x - \frac{1}{x} = 0 \qquad (۷ . ۲)$$

واضح اسن که مجموعه جوابهای (۶ . ۲) و (۷ . ۲) یکسان است (البته ، منحنی نمایش آنها یکسان نیست) . از این رو ، کافی است معادلهٔ (۷ . ۲) را بررسی کنیم . برای این منظور منحنی های زیر را رسم می کنیم و طول نقاط تلاقی آنها را به دست می آوریم . (شکل ۲ـ۵) .

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$



شکل ۲ـ۵

اولا با توجه به تابع $f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$ ، اگر $f(\alpha) = 0$

آن گاه

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) = 0 \qquad (۲_۴)$$

یعنی ریشه ها نسبت به مبدا قرینه اند . شکل (۲_۴) نشان می دهد که معادله

دارای بی نهایت ریشهٔ مثبت است . α_1 در نزدیکی ۱ و بقیه در مجاورت

$k = 1, 2, \ldots, k\pi$

قرار دارند (نزدیک نقاطی که $\sin x$ صفر می شود) .

۲ـ۲ـ۶ جدول بندی مقادیر تابع

در این روش می توان ریشه هایی را که تابع f در دو طرف آن تغییـر علامـت مـی دهـد پیدا کرد . قبل از توضیح این روش تعریف زیر و قضیهٔ ۲ـ۲ـ۸ را بیان می کنیم .

۲ـ۲ـ۷ تعریف

فرض کنید

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x),\left(g(\alpha)\neq 0, m\in N\right)$$

اگر $m>1$ می گوییم α ریشهٔ تکراری معادلهٔ $f(x)=0$ است و مرتبهٔ تکرار آن m است .

این تعریف نشان می دهد که اگر m زوج باشد تابع f در نزدیکی α تغییر علامت

نمی دهد یعنی $f(x)$ در نزدیکی $x=\alpha$ و دو طرف آن دارای یک علامت است .

۲ـ۲ـ۸ قضیه

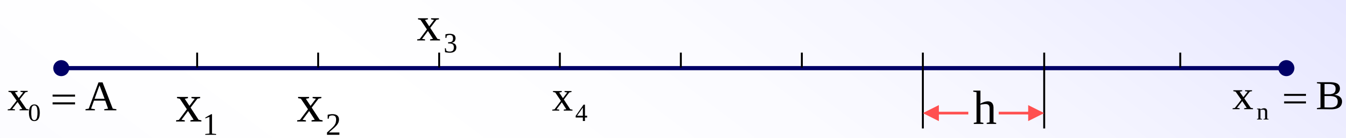
(بولتزانو ـ وایشتراس) : اگر تابع f بر [a,b] پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند c هست که $a<c<b$ و $f(c)=0$. به عبارت دیگر معادلهٔ $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در (a,b) دارد . به علاوه ، اگر f بر [a,b] اکیدا یکنوا (صعودی یا نزولی باشد) c منحصر به فرد است .

د رعمل وقتی بخواهیم ریشه هایی از $f(x)=0$ را ، که f در دو طرف آنها تغییر علامت می دهد ، و در بازهٔ [A , B] قرار دارند ، تعیین کنیم این بازه را به n قسمت متساوی تقسیم می کنیم و n آن قدر بزرگ اختیار می کنیم که نقاط تقسیم به اندازهٔ کافی به هم نزدیک باشند . در این صورت ، فاصلهٔ نقاط متوالی عبارت است از

$$h=\frac{B-A}{n}$$

و نقاط عبارتند از (شکل ۲ـ۶)

$$x_0 = A, x_i = x_0 + ih, i = 1,2,\dots,n$$



بعد قرار می دهیم :

$$\gamma_i = f(x_i) f(x_{i+1})$$

و سه حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱ـ اگر $\gamma_i < 0$ آن گاه حداقل یک ریشه در (x_i, x_{i+1}) موجود است . برای توابع هموار و h کوچک ، معمولا یک ریشه موجود است .

۲ـ اگر $\gamma_i > 0$ ممکن است معادله در (x_i , x_{i+1}) ریشهٔ تکراری با مرتبهٔ تکرار زوج

داشته باشد . (مثلا ، برای $f(x)=\cos x - 1=0$ صفر ریشهٔ تکراری مرتبهٔ دوم

است و f د رمجاورت $\alpha=0$ تغییر علامت نمی دهد .) این ظن وقتی قوی

می شود که خیلی کوچک باشد (و وقتی رد می شود که γ_i کوچک نباشد) .

به هر جهت تعیین این گونه ریشه ها آسان نیست و به تمهیدات بیشتری نیاز

دارد .

۳ـ اگر $\gamma_i = 0$ آن گاه $f(x_i) = 0$ یا $f(x_{i+1}) = 0$.

۲_۲_۹ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادلهٔ $f(x)=\sin x-x+0/5=0$ را تعیین کنید .

با توجه به اینکه همواره $-1\leq \sin x \leq 1$ داریم

$$-x-0/5\leq f(x)\leq 1/5-x$$

از این رو ، اگر $-x<0$ آن گاه $f(x)<0$ یعنی ریشه ای در $(1/5,\infty)$ موجود نیست

و اگر $0<-x-0/5$ آنگاه $0<f(x)$ و معادله در $(-\infty,-0/5)$ نیز ریشه ندارد .

پس باید بازهٔ $[-0/5 , 1/5]$ را مورد بررسی قرار می دهیم . جدول (2-6) نشان می دهد که معادله در $(-0/5,1/5)$ یک ریشه دارد (اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده اند) .

جدول ۲ـ۶

x	-0/5	1	1/5
sin x	-0/4794	0/8415	0/9975
f(x)	0/5206	0/3415	-0/0025

از جدول (۲ـ۶) و با توجه به مقادیر $f(1)$ و $f(1/5)$ ، ریشه باید نزدیک ۱/۵ باشد .

با توجه به اینکه

$$f(1/4)=0/047 \ (3D)$$

نتیجه می گیریم که $\alpha \in (1/4, 1/5)$ ، مثلا $\alpha \approx 1/45$. چون $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$

تابع f اکیدا نزولی است و لذا ، تنها یک ریشه موجود است . البته تعیین

ریشه های معادلهٔ $\sin x - x + 0/5 = 0$ به روش رسم منحنی ساده تر است .

۲ـ۲ـ۱۰ مثال

بدون رسم منحنی ثابت کنید معادلهٔ زیر تنها یک ریشه دارد .

$$f(x) = x^2 - (1-x)^5 = 0 \qquad (۲ . ۸)$$

اولاً ، $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ پس حداقل یک ریشه در $(1,0)$ موجود است . اما چون $f'(x) = 2x + 5(1-x)^4$، در صورتی که $x \geq 0$ داریم $f'(x) > 0$ یعنی ، تابع f در $[0,+\infty]$ اکیدا صعودی است . بنابر این ، معادلهٔ (۲ . ۸) تنها یک ریشهٔ مثبت دارد . اکنون ثابت می کنیم که این معادله ریشهٔ منفی ندارد . برای این منظور نشان می دهیم که اگر $x<0$ آن گاه $f(x)<0$ زیرا ،

$$f(x) = x^2 - (1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5)$$
$$= x^2 - 1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$$
$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 5x - 1$$

حال چون ضریب توان های فرد x مثبت و ضریب توان های زوج x منفی است نتیجه می گیریم که اگر $x<0$ آن گاه $f(x)<0$.

3-2 تعیین ریشه ها با دقت مطلوب

پس از تعیین حدود یک ریشه لازم است تقریبی از آن را با دقت

خواسته شده حساب کنیم . برای این منظور دنباله ای از اعداد مانند

$\{x_n\}$می سازیم به طوری که حد این دنباله ریشهٔ مورد نظر باشد .

۲ـ۴ روش دو بخشی (یا روش تنصیف)

در این روش فرض می کنیم که دو عدد a و b موجودند به قسمی که

الف) تابع f در [a,b] پیوسته است

ب) $f(a)\, f(b) < 0$

ج) معادلهٔ $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را α می نامیم) .

با مفروضات بالا دنبالهٔ $\{x_n\}$ را چنان می سازیم که $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

برای این منظور ، مطابق شکل (2-7) ، بازهٔ [a,b] را به دو بخش متساوی تقسیم

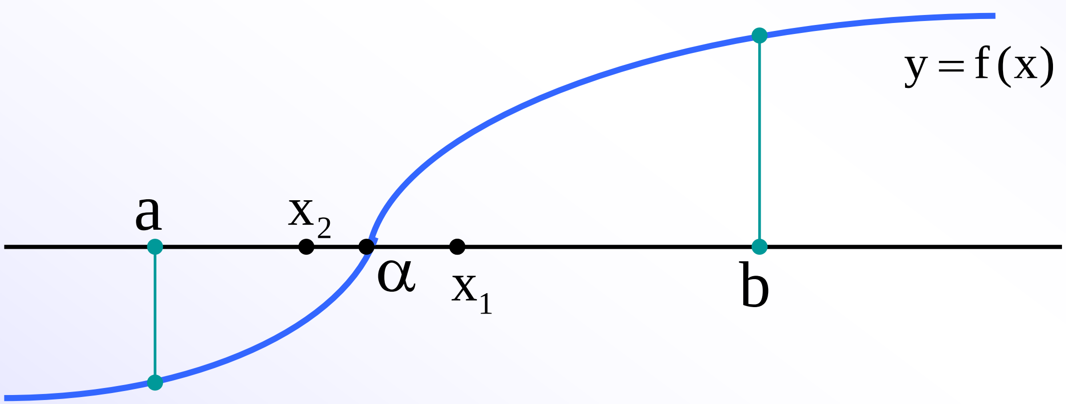
می کنیم . یعنی ، قرار می دهیم $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$

به عبارت دیگر ، x_1 را وسط بازهٔ [a,b] می گیریم تا [a,b] به دو بخش $[a, x_1]$ و $[x_1, b]$ تقسیم شود .

با توجه به شرط (ج) ، α در یکی از این دو بخش قرار دارد . بخشی که α در آن قرار دارد ، اختیار و مجددا آن را به دو بخش متساوی تقسیم و نیمهٔ حاوی α را اختیار می کنیم

(در شکل (۲ـ۷) ، بازهٔ $[a, x_1]$ را اختیار می کنیم و قرار می دهیم $\left(x_2 = \frac{a + x_1}{2}\right.$

و این عمل را همین طور ادامه می دهیم .



شکل ۲ـ۷

اما ، در حالت کلی رسم منحنی میسر نیست و می توان برای ادامهٔ کار به طریق جبری زیر عمل کرد :

۱ـ اگر $f(a)f(x_1)<0$ آن گاه ریشه در $[a, x_1]$ است . از این رو ، می توان قرار داد $b = x_1$ و مجددا عمل را در [a,b] تکرار کرد .

۲ـ اگر $f(a)f(x_1)>0$ آن گاه ریشه در $[x_1, b]$ است ، لذا ، می توان قرارداد $a = x_1$ و مجددا عمل را در [a,b] تکرار کرد .

۳ـ اگر $f(a)f(x_1)=0$ آن گاه ریشه x_1 است و عمل خاتمه پیدا می کند .

به این ترتیب دنباله ای چون $\{x_n\}$ ساخته می شود . البته عملا نمی توان بینهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهایی برای توقف عملیات وجود داشته باشد . اینکه جملات دنبالهٔ بالا تا کجا باید حساب شوند و آیا این دنباله همگرا است یا نه را بعدا بررسی می کنیم .

۲ـ۴ـ۱ مثال

می دانیم که معادلهٔ $x+\cos x = 0$ فقط یک ریشه در $(-1, 0)$ دارد . تقریبی از این ریشه را به روش دو بخشی حساب کنید .

حل :

جدول زیر محاسبات مربوط را نشان می دهد . (به نحوهٔ درج اعداد در جدول توجه کنید ، نمودار جریان این روش در ۲ـ۴ـ۶ آمده است) .

د راین مثال ، $a=-1$ ، $b=0$ ، $(2D)$ $f(a)=-0/46$ و $f(b)=1$

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)f(x_n)$ تعیین می شود و همواره $a < b$.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	-1	0	-0/5	-
2	-1	-0/5	-0/75	+
3	-0/75	-0/5	-0/625	-
4	-0/75	-0/625	0/6875	-
5	-0/75	-0/6875	-0/71875	-
6	-0/75	-0/71875	-0/734375	+
7	-0/734375	-0/71875	-0/7265625	

۲_۴_۲ مثال

تقریبی از یک ریشهٔ معادلهٔ $3xe^{x}=1$ را تا سه رقم اعشار درست حساب کنید .

حل :

معادلهٔفوق را به صورت $f(x)=3x-e^{-x}=0$ می نویسیم . واضح است کـه ریشــه هـای دو معادله یکسان هستند . پس از جدول بند ب مقادیر f در میابیم کـه f در بـازهٔ (0/25,0/27) تغییر علامت می دهد و با توجه به اکیدا صعودی بودن f معادله تنها یک ریشه دارد . جدول زیر تقریبی از ریشه را تا سه رقم اعشار درست به دست می دهد . در ایم جدول ،

$a=0/25 \quad , \quad f(a)=-0/0288 \quad (4D)$

$b=0/27 \quad , \quad f(b)=0/4662$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	0/25	0/27	0/26	-
2	0/25	0/26	0/255	+
3	0/255	0/26	0/2575	+
4	0/2575	0/26	0/2588	-
5	0/2575	0/2588	0/2582	-
6	0/2575	0/2582	0/25785	

از این رو ، ریشه تا سه رقم اعشار برابر 0/258 است .

۲ـ۴ـ۳ همگرایی روش دوبخشی

با توجه به نحوهٔ به دست آمدن x_n ها به روش دو بخشی داریم (شکل (۲ـ۷) ملاحظه می شود) :

$$|x_1-\alpha| < \frac{b-a}{2}$$

همچنین با توجه به اینکه طول بازهٔ $[a, x_1]$ برابر $\frac{b-a}{2}$ است داریم :

$$|x_2-\alpha| < \frac{\frac{b-a}{2}}{2} \frac{b-a}{2^2}$$

بنابراین ، پس از n تکرار ، نتیجه می شود

$$0 \le |x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

(۲ـ۹)

چون $\alpha < \frac{1}{2} < 1$ ، بنابر قضیهٔ ۲ . ۳ . ۲ ، $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ که در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$ پس ،

بنابر قضیهٔ ۲ـ۳ـ۴ ،

$$\lim |x_n-\alpha| = 0$$

که نتیجه می دهد

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

بنابراین ، روش دو بخشی همیشه همگراست . یعنی ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به ایـن روش سـاخته مـی شود حتما به همگراست . ضمنا نا مساوی (۲ . ۹) یک کران بالا برای خطای x_n به دست می دهد ، توجه کنید که این کران بالا ، یعنی $\frac{b-a}{2^n}$ ، قبل از محاسبهٔ $\frac{b-a}{2^n}$ قابـل محاسـبه اسـت .

بنابر این ، x_n را یک کران خطای پیشین برای x_n می نامند . از (۲ . ۹) سرعت همگرایی $\{x_n\}$ به α را نیز می توان پیش بینی کرد، این سرعت متناسب با سرعت همگرایی دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ به صفر است . با توجه به اینکه $2^{10} \approx 1000$ داریم :

$$\frac{1}{2^{10}} \approx 0/001 = 10^{-3}$$

بنابر این ، بعد از هر ۱۰ تکرار سه رقم به ارقام درست جواب تقریبی اضافه می شود، و این نشان می دهد که روش دو بخشی کند است و برای تعیین صفرهای توابعی توصیه می شود که محاسبهٔ آنها ساده و کم خطا باشد .

نا مساوی (۲ . ۹) در تعیین تقریبی که خطای آن از عدد کوچک معلومی کوچکتر باشد نیز به کار می رود ، به مثال زیر توجه کنید .

۲ـ۴ـ۴ مثال

تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x) = x^2 - 2$ ، یعنی $\alpha = \sqrt{2}$ ، را به روش دو بخشی حساب کنید که برای آن داشته باشیم

$$|x_n - \alpha| \langle 10^{-2}$$

با توجه به اینکه ریشهٔ معادله در $(1,2)$ است داریم $b-a=1$ و

$$\left|x_n-\alpha\right| \langle \frac{b-a}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

پس ، کافی است n را چنان پیدا کنیم که

$$\frac{1}{2^n}\leq 10^{-2}$$

اولین n که در نا مساوی بالا صدق می کند ۷ است . پس باید تاx_7 حساب کنیم ، جدول (۲ـ۸) به همین منظور تنظیم شده است .

(a=1 , f(a)=-1 , b=2 , f(b)=2)

جدول (۲ـ۸)

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)f(x_n)$ علامت
1	1	2	1/5	-
2	1	1/5	1/25	+
3	1/25	1/5	1/375	+
4	1/375	1/5	1/4375	-
5	1/375	1/4375	1/40625	+
6	1/40625	1/4375	1/421875	-
7	1/40625	1/421875	1/4140625	

۲ـ۴ـ۵ معیارهای توقف

برای توقف محاسبهٔ x_nها ، نه فقط در روش دو بخشی بلکه در روشهایی که بعدا هم معرفی خواهند شد ، معیارهایی وجود دارد که در این قسمت بررسی می کنیم.

ا لف) اگر ε عدد مفروض و کوچکی باشد، x_n ها را تا جایی حساب می کنیم که $|f(x_n)|<\varepsilon$. یعنی ، به محض اینکه $|f(x_n)|<\varepsilon$ عملیات را متوقف می کنیم

ب) اگر $f(x_n)=0$ عملیات را متوقف و $|f(x_n)|$ را به عنوان تقریبی از 10^{-n} می پذیریم

ج) گاهی خواسته می شود عملیات را وقتی متوقف کنیم که خطای مطلق x_n از ε کوچکتر باشد یعنی ، وقتی که $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. چون مقدار α معلوم نیست از نامساوی (۲ . ۹) استفاده می کنیم و قرار می دهیم (مثال ۲ـ۴ـ۴ را نیز ملاحظه کنید) :

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \qquad (۲ . ۱۰)$$

که از آن نتیجه می شود

$$2^n \le \frac{b-a}{\varepsilon}$$

سپس n را کوچکترین عدد طبیعی اختیار می کنیم که در نا مساوی زیر صدق کند (از طرفین نامساوی بالا در مبنای ۲ لگاریتم بگیرید) .

$$n \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

در این صورت ، اگر x_n را حساب کنیم خطای مطلق آن از ε کوچکتر خواهد بود زیرا از (۲ . ۹) و (۲ . ۱۰) داریم :

$$\left|x_n - \alpha\right| < \frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$$

که نتیجه می دهد ،

$$\left|x_n - \alpha\right| < \varepsilon$$

د) گاهی خواسته می شود که پس از m تکرار (m معلوم است) ، عملیات متوقف و x_m به عنوان تقریبی از α پذیرفته شود .

۲ـ۴ـ۵ تبصره

توجه کنید که ε را نباید خیلی کوچک اختیار کرد . مثلا در دقت معمولی ، اگر ε را کوچکتر از 10^{-7} اختیار کنیم ممکن است نا مساوی های $|f(x_n)| < \varepsilon$ یا $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ هرگز برقرار نشوند . از این رو ، بهتر است تلفیقی از معیار (الف) یـا (ب) را با معیار (د) در نظر گرفت . مثلا ، عملیات را وقتی متوقف می کنیم که

$$|f(x_n)| < \varepsilon$$

و یا

$$n = m$$

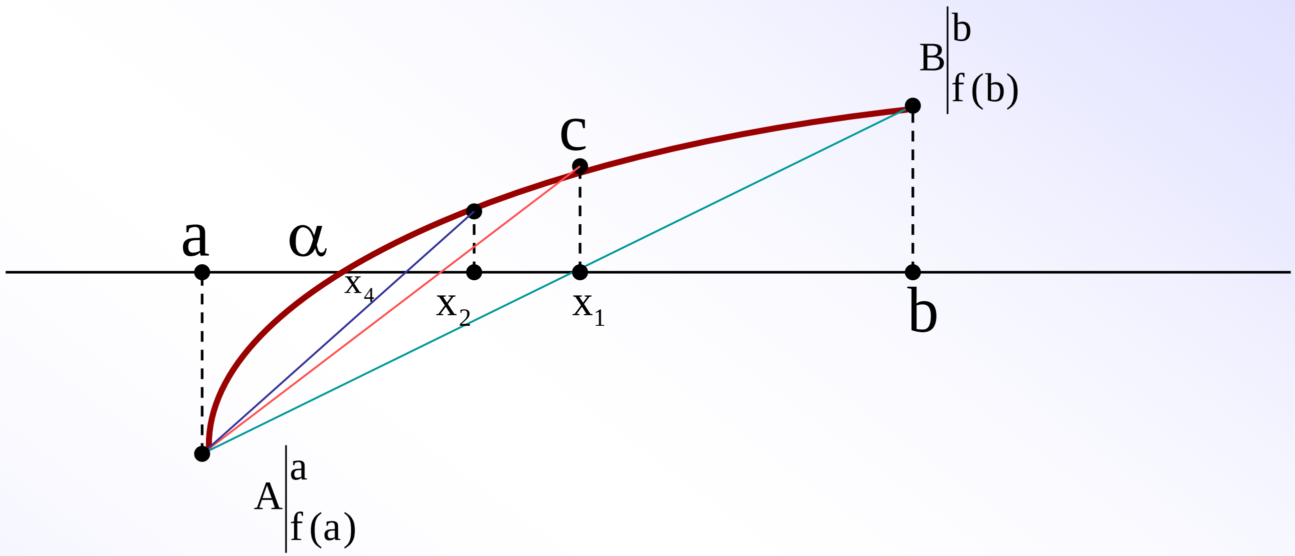
که در آن ε و m دو عدد مفروض هستند .

۲ـ۵ روش نابجایی

روش نابجایی بسیار قدیمی است و مصریان قدیم آن را مورداستفاده قـرار داده انـد. اگـر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\,f(b) < 0$ و معادلهٔ $f(x)=0$ تنها یک ریشــه در $(a\ ,\ b)$ داشــته باشـد برای تعیین تقریبی از این ریشه ، که آن را α می نامیم ، چنین استدلال می شود :

گرچه منحنی نمایش $y=f(x)$ بین دو نقطهٔ A و B یک خط مستقیم نیست اما اگـر A و B را با یک خط مستقیم به هم وصل کنیم محل تلاقی آن با محور $x'ox$ ،

نقطه ای به طول x_1 را می دهد که تقریبی از α است (شکل ۲ـ۹) . بعد x_2، x_3 و... را به همین ترتیب ، مطابق شکل ، به دست می آوریم .



شکل ۲ـ۹

برای تعیین مقدار x_1 برحسب مختصات A و B خط AB را می نویسیم و آن را با محور $x'ox$ قطع می دهیم .

معادلهٔ خط AB :

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نقطهٔ تلاقی این خط را با محور $x'ox$ نقطه ای به مختصات $(x_1,0)$ مــی گیــریم در نتیجــه باید داشته باشیم

$$\frac{0-f(a)}{x_1-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

که پس از ساده کردن ، فرمول روش نابه جایی به دست می آید

$$x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (۲ . ۱۱)$$

برای تعیین x_2، تقریبا مشابه روش دو بخشی ، سه حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱ـ اگر $f(a)f(x_1)<0$ آنگاه ریشه در (a,x_1) است . لذا ، در فرمول (۲ . ۱۱) به جـای b قـرار می دهیم (به عبارتی از سه نقطهٔ a و b و x_1 نقطهٔ b نابجاست) و x_2 را حساب می کنــیم .

به عبارت دیگر

$$x_2=\frac{af(x_1)-x_1f(a)}{f(x_1)-f(a)}$$

۲ـ اگر $f(a)f(x_1) > 0$ ریشه در (x_1, b) است و x_2 از فرمول زیر حساب می شود

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

۳ـ اگر $f(a)f(x_1) = 0$ ریشه x_1 است و مسئله حل شده است .

به این ترتیب باز هم دنباله ای از اعداد حاصل می شود که چون در بازه هایی قرار دارنـد کـه طول آنها مرتبا کوچک می شود همیشه همگراست .نمودار جریان این روش ، با معیــار توقـف $|f(x_n)| < \varepsilon$، دقیقا مانند نمودار جریان روش دو بخشی است (۲ـ۴ـ۶ را ملاحظه می کنید) تنها تفاوت فرمول مربوط به محاسبهٔ x است که چنین است

$$x \leftarrow \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

۲ـ۵ـ۱ مثال

تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^{x}=1$ را که در (0/27 , 0/25) قرار دارد ، به روش نابجایی ، تا سه رقم اعشار درست حساب کنید .

پس از نوشتن معادله بالا به شکل $f(x)=3x-e^{-x}=0$ داریم (عملیات تا چهار رقم اعشار گرد شده اند) :

$$x_1=\frac{0/25\times 0/0466-0/27\times(-0/0288)}{0/0466-(-0/0288)}=0/2577$$

چون ، $f(x_1)=0/0003$ ریشه در (0/2577 , 0/25) است و

$$x_2=\frac{0/25\times 0/0003-0/2577\times(0/0288)}{0/0003-(-0/0288)}$$

بنابر این ، ریشه تا سه رقم اعشار درست برابر 0/258 است .

مثال ۲ـ۵ـ۲

برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=x^2-2=0$ دو تکرار از روش جابجایی را انجام دهید .

با انتخاب a =1 و b =2 داریم :   f(a) = -1 , f(b) =2

و

$$x_1=\frac{1\times 2-2\times(-1)}{2-(-1)}=\frac{4}{3}$$

چون ، ریشه در است . بنابر این ،

$$x_2=\frac{\frac{4}{3}\times 2-2\times\left(-\frac{2}{9}\right)}{2-\left(-\frac{2}{9}\right)}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{4}{9}}{2+\frac{2}{9}}=1/4$$

مقدار x_2 را با مقدار نظیر آن که د رمثال ۲ـ۴ـ۲ به دست آوردیم مقایسه کنید .کدام تقریب بهتر است ؟ (حتما می دانید که. $\alpha=\sqrt{2}=1/4142$)

۲ـ۵ـ۳ خصوصیات روش نا به جایی

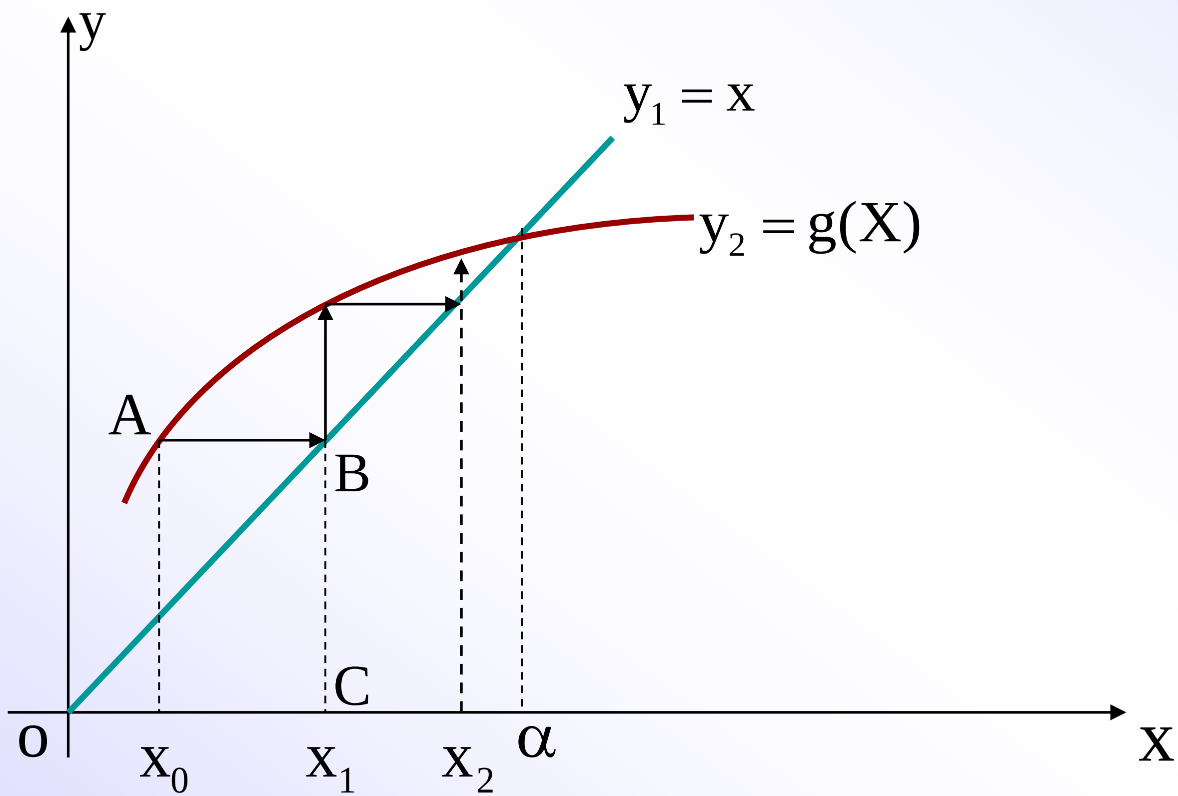
روش نا به جایی ،همانند روش دو بخشی ، همگراییِ تضمین شده دارد و عموما سریعتر از روش دو بخشی است و جایگزین خوبی برای آن است . البته ، عملیات این روش بیش از روش دو بخشی است (دو برابر و نیم) . اما ، اگر x_i ها جملگی در یک طرف ریشه باشند همگرایی می تواند حتی کند تر از روش دو بخشی باشد

(شکل (۲ـ۱۰) را ببینید) .

۲ـ۶ـ۲ تعیین جملات $\{X_n\}$ به روش هندسی

اولا ریشهٔ $x=g(x)$ طول محل تلاقی منحنی های زیر است :

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = g(X) \end{cases}$$



شکل ۲ـ۱۳

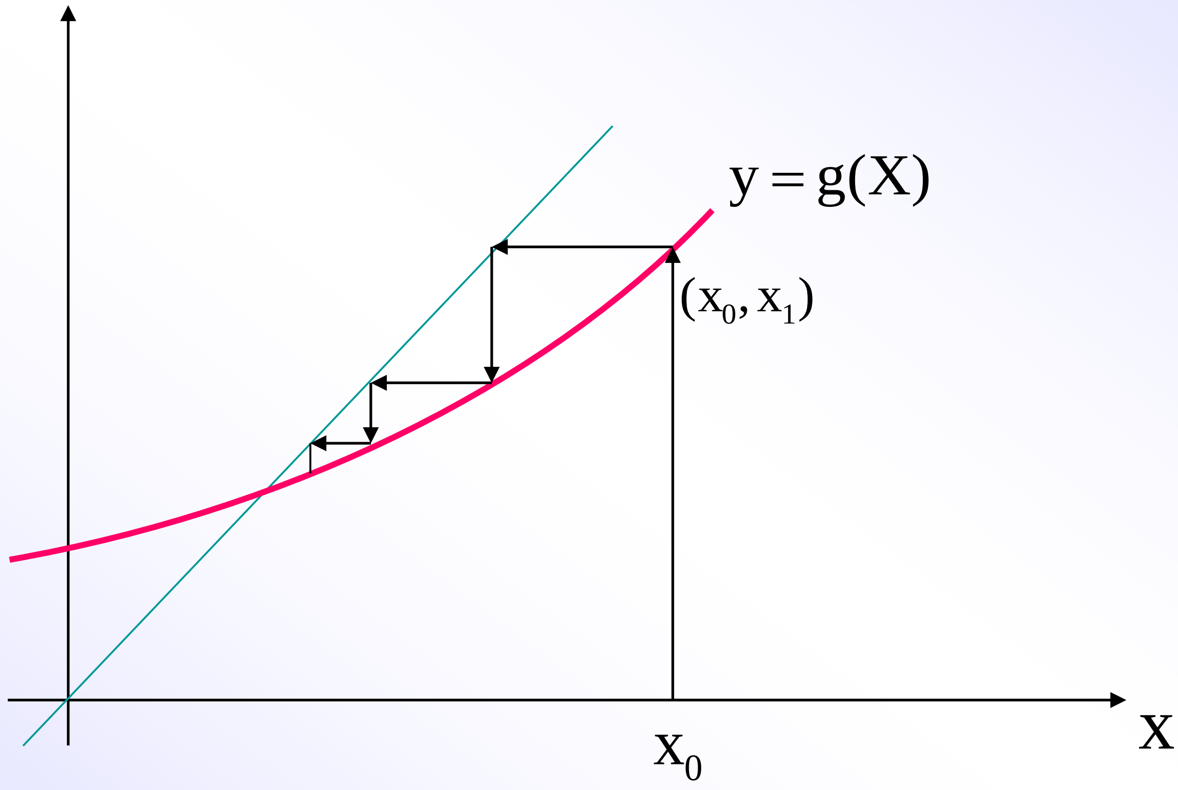
اگر x_0 معلوم باشد فاصلهٔ A تا محور ox همان $g(x_0)$ (یا x_1) است . بنابر این ، اگر از A خطی موازی با محور ox بکشیم تا منحنی $y_1 = x$ (یعنی نیمساز ربع اول و سوم) را در B قطع کند ، فاصلهٔ B تا محور ox نیز $g(x_0)$ است . ازطرف دیگر ، BC=OC ، زیرا زاویهٔ COB مساوی 45° است . پس ،

$$OC = BC = g(x_0) = x_1$$

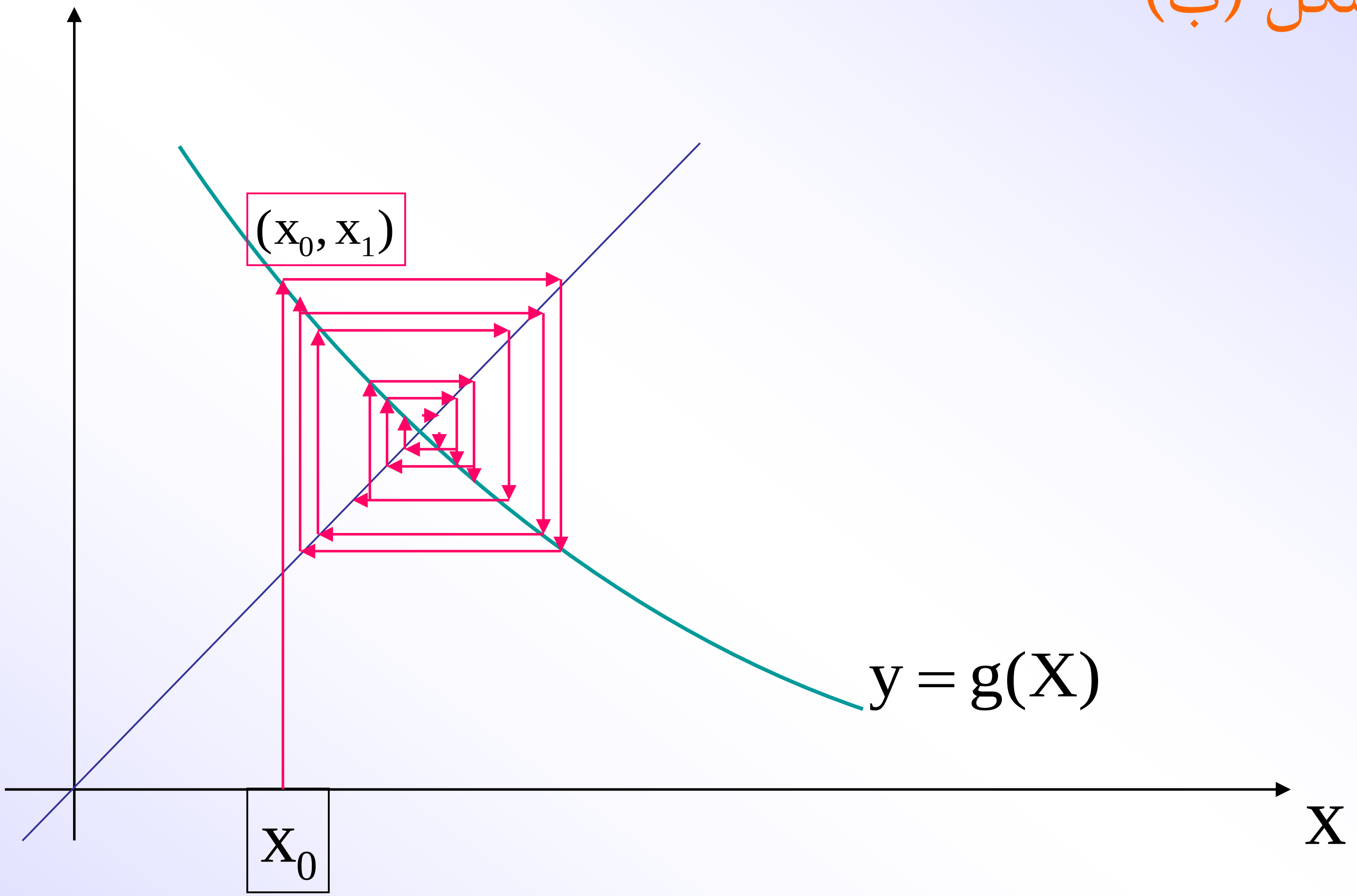
به همین ترتیب x_2 به دست می آید (به شکل توجه کنید) .

شکل های ارئه شده حالات مختلف $g(x)$ و x_0 و همگرایی یا واگرایی $\{x_n\}$ را نشان می دهند .

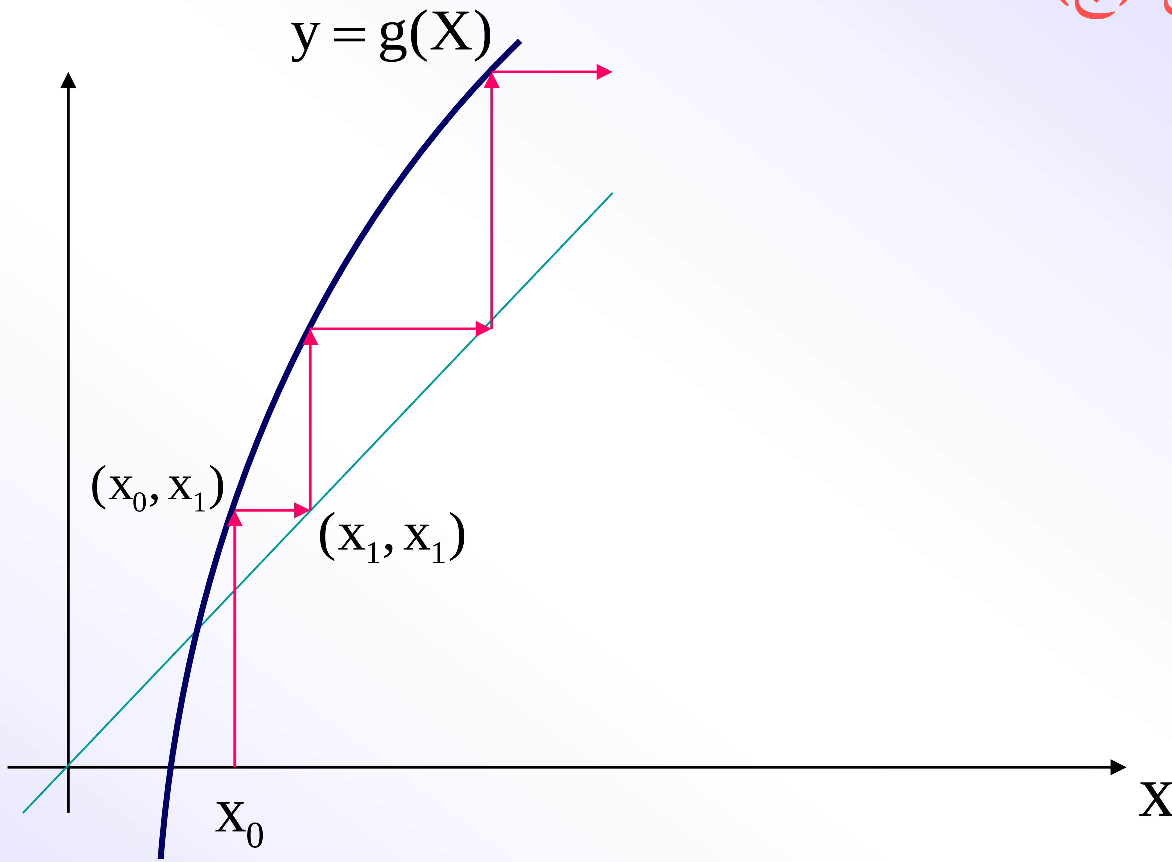
شکل (الف)



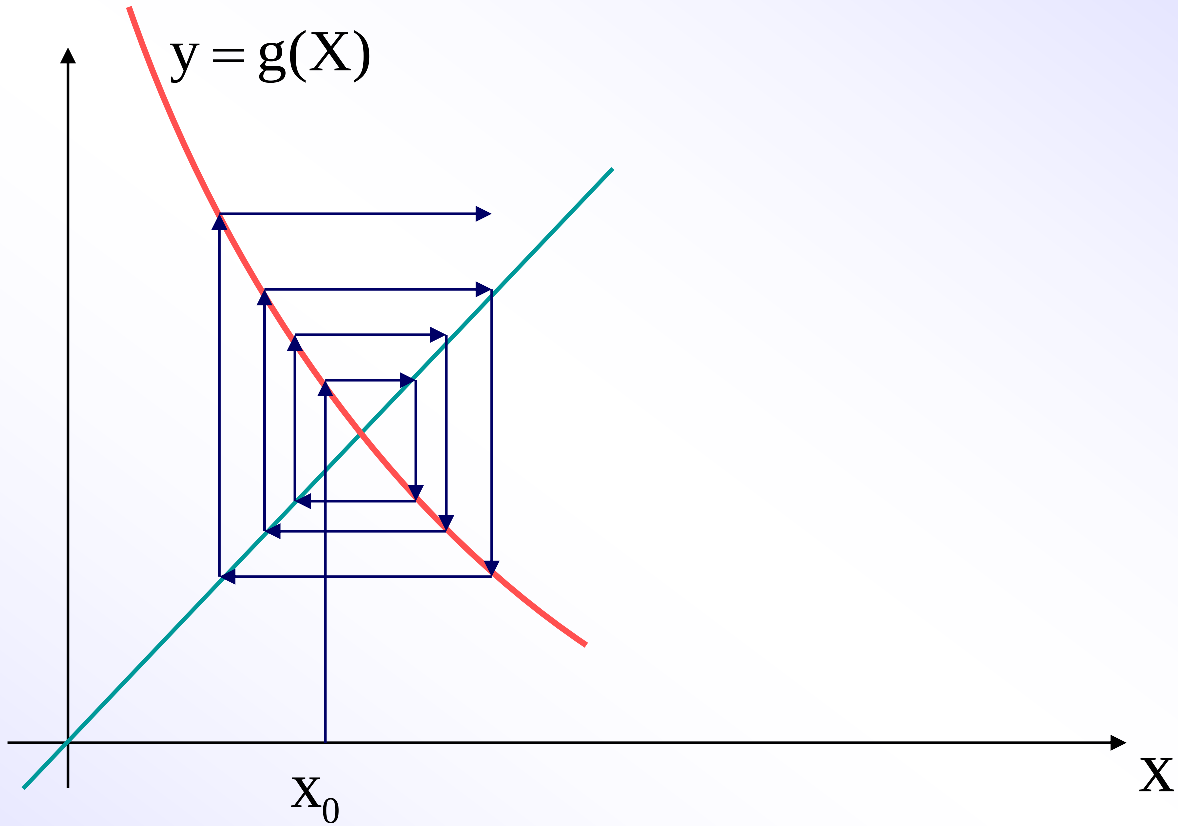
شکل (ب)



شکل (ج)



شکل (د)



شکل های (الف) و (ب) همگرایی و شکل های (ج) و

(د) واگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ را نشان می دهند .

۲ـ۶ـ۳ همگرایی روش تکرار ساده

تعیین خصوصیات تابع $g(x)$ و مقدار اولیهٔ x_0 که به ازای آن ها $\{x_n\}$ همگرا باشد مستلزم قضیهٔ زیر است .

۲ـ۶ـ۴ قضیه(مطالعه)

اگر f تابعی بر $[a,b]$ و در هر نقطهٔ (a,b) مشتق داشته باشد ی از η (a,b) هست که

$$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a).$$

با استفاده از قضیهٔ بالا ، ابتدا به ذکر این مطلب می پردازیم که چون

$$x_{n+1}=g(x_n),\alpha=g(\alpha)$$

بنابر قضیهٔ ۲ـ۶ـ۴ ،

$$x_{n+1}-\alpha=g(x_n)-g(\alpha)=g'(\eta_n)(x_n-\alpha)$$

که در آن η_n بین x_n و α است . بنابر این ،

$$|x_{n+1}-\alpha| = |g'(\eta_n)||x_n-\alpha|$$

شرط کافی برای اینکه $|x_n-\alpha| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ آن است که جملات دنبالهٔ $\{|x_n-\alpha|\}$ مرتبا کوچک شوند . یعنی ، وقتی که همواره

$$|g'(\eta_n)| \le L < 1$$

اما چون جای η_n مشخص نیست عملی تر است که شرط بالا را با شرط

$$|g'(x)| \le L < 1, \alpha$$

در یک همسایگی جایگزین کنیم .

دو قضیهٔ بعد همه چیز را با استدلال روشن می کنند .

۲ـ۶ـ۵ قضیه(مطالعه)

اگر g تابعی بر [a,b] به توی [a,b] باشد و در این بازه

(۲ . ۱۴)

$$|g'(x)| \le L < 1$$

آن گاه معادلهٔ g(x) = x تنها یک ریشه دارد ، که متعلق به [a,b] است .

۲ـ۶ـ۶ قضیه

با شرایط قضیهٔ ۲ـ۶ـ۵ ، به ازای هر x_0 از [a,b] دنبالهٔ $\{x_n\}$ با شرط $x_{n+1} = g(x_n)$

به تنها جواب g(x) = x همگراست .

مثال های زیر نحوۀتشخیص مناسب بودن g و تعیین L را روشن می کنند و نشان می دهند

که چگونه می توان قبل از محاسبۀ جملات $\{x_n\}$ سرعت همگرایی آن را پیش بینی کرد .

۲ـ۶ـ۷ مثال

برای تعیین ریشۀ مثبت معادلۀ $x^2+x-1=0$ که در بازۀ I=[0/5 , 1] قرار دارد ، به روش تکرار ساده ، g(x) های زیر را انتخاب می کنیم (مثال ۲ـ۶ـ۱ملاحظه شود) . مناسب بودن یا نبودن هریک و بازه ای که x_0 می تواند از آن انتخاب شود را تعیین کنید .

الف)

واضح است که $g_1(x)=1-x^2$ اگر $x \in I$ آنگاه

$$g_1'(x) = -2x \qquad |g_1'(x)| = 2x \geq 1$$

بنابراین ، بهتر است از $g_1(x)$ استفاده نکنیم ، د رواقع x_0 هر عضو I باشد $\{x_n\}$ واگراست .

ب)

چون $g_2(x)=\sqrt{1-x}$ داریم $g_2'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

و اگر x نزدیک ۱ باشد $|g_2'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ می تواند بسیار بزرگ باشد . آیا مناسب نیست ؟

جدول(12.2) نشان می دهد که $g_2(x)$ و $x_0=0/5$ مناسب هستند.

به تحقیق معلوم می شود که (تحقیق کنید)

$\alpha \in [0/51...,...0/7]$

حال سعی می کنیم ثابت کنیم اگر $0/51 \le x \le 0/7$ آن گاه

$$\left|g_2'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \le L\langle 1$$

برای این منظور نا مساوی های زیر را می نویسیم (این روش را برای همیشه الگو قرار دهید)

$$0/51 \le x \le 0/7$$

$$-0/7 \le -x \le -0/51$$

$$0/3 \le 1-x \le 0/49$$

$$0/55 \approx \sqrt{0/3} \le \sqrt{1-x} \le \sqrt{0/49} = 0/7$$

از نا مساوی های اخیر معلوم می شود که $g_2(x)$ تابعی بر [0/51,0/7] به توی همین بازه است

. و نیز

$$|g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{0/3}} \approx 0/91 < 1$$

بنابراین ، L= 0/91 . پس $g_2(x)$ مناسب است . اما ، چون L نزدیک عدد یک است همگرایی

کند است . (جدول (۲ . ۱۲) مؤید این پیشگویی است) .

ضمنا ، علت اینکه $g_2(x)$ برای $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ دنباله ای واگرا تولید می کند آن است که این

دو مقدار اولیه در (0/51,0/7) نیستند .

ج) $g_3(x) = \dfrac{1}{x+1}$

د راین حالت ، $g_3'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ و اگر $x \in [0/51, 0/7]$

$$|g_3'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{(0/5+1)^2} = \frac{1}{2/25} \langle 1$$

مشاهده می شود که نه فقط $g_3(x)$ مناسب است بلکه L هم ، یعنی $\frac{1}{2/25}$ به صفر نزدیکتر است تا به یک ، در نتیجه انتظار می رود که همگرایی $\{x_n\}$ نسبتا تند باشد . ضمنا اگر $x \in [0/51, 0/7]$ نتیجه می شود

$$\frac{1}{1/7} = \frac{1}{1+0/7} \le \frac{1}{1+x} \langle \frac{1}{1+0/5} = \frac{2}{3}$$

بنابر این با توجه به اینکه $\frac{2}{3} < 0/7$ و $0/51 < \frac{1}{1/7}$، داریم : $g_3(x) = \frac{1}{1+x} \in [0/51, 0/7]$

یعنی ، g_3 تابعی بر $[0/51,0/7]$ بتوی همین بازه است .

۲ـ۶ـ۸ مثال

۱ـ برای تعیین تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^{x}=1$ از روش تکرار ساده استفاده کنید.

حل : معادله را به شکل $x=\frac{e^{-x}}{3}$ می نویسیم و قرار می دهیم $g(x)=\frac{e^{-x}}{3}$.

به سادگی معلوم است که ریشهٔ معادلهٔ بالا در $(0,1)$ قرار دارد و g تابعی بـر $(0,1)$ بتـوی $(0,1)$ است . در ضمن

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{3}$$

و اگر $x\in[0,1]$ داریم

$$|g'(x)|=\frac{e^{-x}}{3}\langle\frac{e^{0}}{3}=\frac{1}{3}$$

در اینجا $L=\frac{1}{3}$ که کوچکتر از یک است و $g(x)$ مناسب است . در نتیجه ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ به ازای هر x_0 از $(0,1)$ همگراست .

با استفاده از $x_0 = 0/5$ و رابطهٔ

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیر هستند

$x_1 = 0/2022$ (4 D)

$x_2 = 0/2723$ (4 D)

$x_3 = 0/2539$ (4 D)

$x_4 = 0/2586$ (4 D)

$x_5 = 0/2574$ (4 D)

$x_6 = 0/2577$ (4 D)

$x_7 = 0/2576$ (4 D)

$x_8 = 0/2576$ (4 D)

لذا ، جواب تا چهار رقم اعشار درست 0/2576 است . اگر $f(x)=3xe^{x}-1$ را به ازای

x_8 حساب کنید . نتیجه $-1/3499\times 10^{-4}$ خواهد شد که عددی کوچک است .

۲ـ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ x+cos x=0 ، به روش تکرار ساده ، چنان حسب کنید که

$|f(x_n)|<10^{-2}$.

قرار می دهیم

$$x=-\cos x=g(x)$$

می دانیم که ریشهٔ معادلهٔ x+cos x در [-1,0] قرار دارد . با توجه به این که تابع کسینوس بر

این بازه صعودی است داریم

$$-1\le x\le 0$$

$$0/541\approx\cos(-1)\le\cos x\le 1$$

بنابراین ، $-1 \le -\cos x \le -0/541 < 0$

یعنی ، $g(x) \in [-1,0]$. همچنین داریم $g'(x) = \sin x$ و

$$|g'(x)| = -\sin x = \sin(-x)$$

پس اگر $x \in [-1,0]$ ، با توجه به این که $0 \le -x \le 1$ و تابع سـینوس بـر بـازهٔ [0,1] صـعودی است داریم

$$0 \le \sin(-x) \le \sin 1 \approx 0/8415$$

پس ، $g(x)$ مناسب است ، ولی همگرایی کند است . با فرض $x_0 = -0/7$ داریم :

$$x_1 = -0/7648 \qquad x_4 = -0/7311$$
$$x_2 = -0/7215 \qquad x_5 = -0/7444$$
$$x_3 = -0/7508 \qquad |f(x_5)| \approx 0/00891 < 10^{-2}.$$

۲ـ۷ مرتبۀهمگرایی یک دنباله

تا کنون برای آهنگ همگرایی یک دنباله از کلمات کند و تند یا سریع استفاده کرده ایم . اما ، به راستی معیاری برای سرعت میل کردن جملات یک دنباله وجـود دارد ؟ در اینجـا معیـاری موسوم به مرتبۀ همگرایی تعریف می کنیم . که توسـط آن نـه فقـط انـدازه ای بـرای سـرعت همگرایی به دست می آید بلکه توشط آن می توان سرعت همگرایـی دنبالـه هـای متفـاوت را باهم مقایسه کرد و در نتیجه دو روش را از این نظر مورد مقایسه قرار داد .

۲ـ۷ـ۱ تعریف

فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد ثابت ، حقیقی و مثبت p و C چنان باشند که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right| = C$$

در این صورت ، p را مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ به α نامند . گاهی گفته می شود که روشی که $\{x_n\}$ آن به دست می آیند از مرتبهٔ p است .

به راحتی می توان مشاهده کرد که هرچه p بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است .

۲ـ۷ـ۲ قضیه

اگر $\{x_n\}$ از روش تکرار ساده به دست آمده باشد ، و به عدد α کـه ریشـهٔ $x=g(x)$ اسـت همگـرا باشد ، و $g'(a)\neq 0$ آن گاه مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ یک است .

۲ـ۷ـ۳ قضیه

در صورتی که $g'(\alpha)=0$ مرتبهٔ همگرایی حداقل دو است .

۲ـ۷ـ۴ تعبیر عددی مرتبهٔ همگرایی

اگر مرتبهٔهمگرایی $\{x_n\}$ مساوی دو باشد ، داریم ، برای n های نسبتا بزرگ ،

$$|x_{n+1}-\alpha| \approx c|x_n-\alpha|^2$$

که در آن c عددی ثابت و مخالف صفر است . فرض کنید c حدود عدد یک باشد . در این صورت ، اگر $|x_1-\alpha|$ حدود 0/1 باشد $|x_2-\alpha|$ حدود 0/01 خواهد بود و بعد $|x_3-\alpha|$ حدود 0/0001 و بالاخره $|x_4-\alpha|$ حدود 10^{-8} خواهد بود . به عبارت دیگر ، ارقام اعشار درست x_n در هر مرحله تقریبا دو برابر مرحلهٔ قبل می شود .

۲ـ۸ روش نیوتن ـ رَفسُن

این روش یکی از سریعترین روش هایی است که تا کنون بررسی کرده ایم . برای به کار بردن این روش باید تخمین نسبتا نزدیکی از ریشۀ مورد نظر در دست باشد . از این رو ، این روش لیشتر برای تصحیح تقریب های نا دقیقی که از روش های دیگر به دست آمده است به کار می رود . این روش ، همان طور که در ۲ـ۸ـ۴ نشان داده خواهد شد ، حالت خاصی از روش تکرار ساده است و تعمیم آن برای تعیین تقریبی از جواب های یک دستگاه معادلات غیر خطی ساده است . از این به بعد روش نیوتن ـ رفسن را به طور خلاصه روش نیوتن می نامیم .

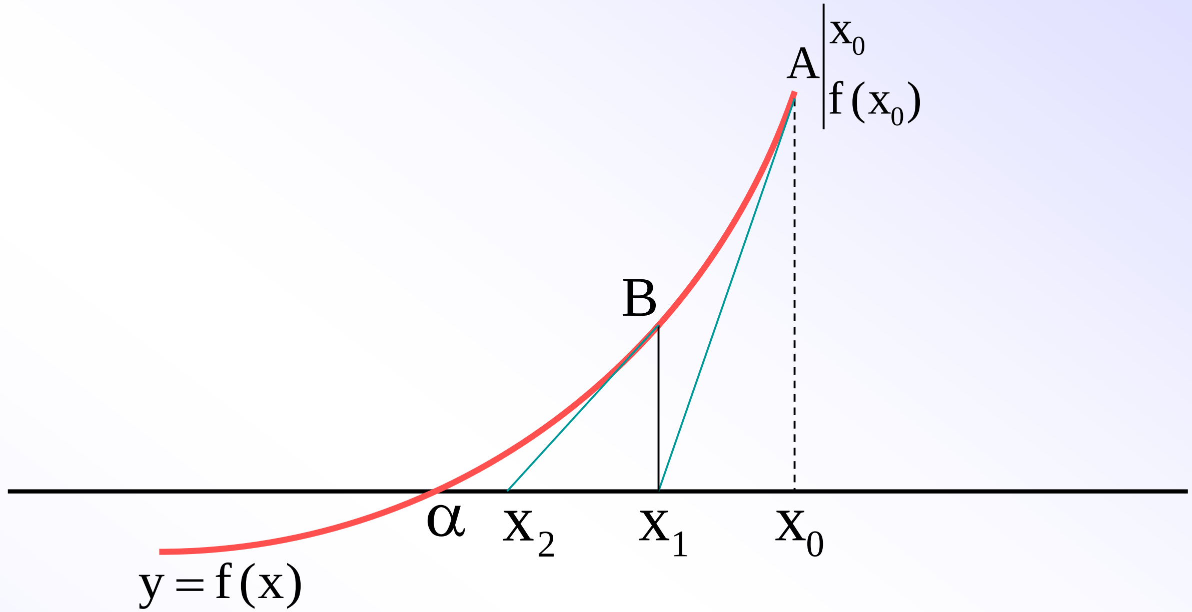
۲ـ۸ـ۱ فرمول تکرار روش نیوتن

فرمول روش نیوتن را می توان به دو طریق به دست آورد که در زیر به شرح آن ها می پردازیم .

طریقۀاول

در این روش از روش هندسی بدست آمدن جملات روش نیوتن استفاده می شود . در این روش اگر x_0 تقریبی از α باشد ، از نقطۀ A واقع بر منحنی $y=g(x)$ به طول x_0 مماس بر این منحنی رسم می کنیم و محل تلاقی آن را با محور طول ها x_1 می نامیم ، شکل (۲ـ۱۴) .

بعد این عمل را تکرار می کنیم تا به تقریب مطلوب برسیم .



شکل ۲ـ۱۴

اگر x_0 معلوم باشد ، برای به دست آوردن x_1 باید معادلهٔ خط مماس بـر منحنـی $y=f(x)$ را در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\ f(x_0)\end{matrix}\right.$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور $x'ox$ تعیین کنـیم . ضـریب زاویـهٔ این خط $f'(x_0)$ است . بنابراین ،

معادلهٔ خط مماس $$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور طول ها را $(x_1,0)$ می گیریم . پس ،

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

که اگر $f'(x_0)\neq 0$، نتیجه می دهد

❋ $$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

پس به طور کلی می توان نوشت:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فرمول بالا فرمول تکرار روش نیوتن است .

طریقه دوم

در این طریقه فرض می کنیم x_0 تقریبی نزدیک به αو h اختلاف آنها باشد،

یعنی

$$\alpha=x_0+h$$

اگر بتوانیم h را به دست آوریم آن را به x_0 اضافه می کنیم و به α می رسیم . با استفاده از بسط تیلور ، داریم:

$$0 = f(\alpha) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\eta)$$

که در آن η بین α و x_0 است . با توجه به فرض ، h کوچک است . از این رو ، می توان از آخرین جمله بسط فوق صرفنظر کرد ، یعنی

$$0 \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

پس،

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لذا اگر $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-$ را به x_0 اضافه کنیم تقریبی از α به دست می آید که آن را x_1 می نامیم .یعنی، $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ که همان فرمول (❉) است.

۲-۸-۲ مثال

۱- a عددی مثبت است و مطلوب است محاسبه تقریبی از $\sqrt{a}$ به روش نیوتن واضح است که $\sqrt{a}$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر است

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

بنابر این ، $f'(x) = 2x$ و فرمول نیوتن چنین است :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

این فرمول را می توان به صورت زیر نیز نوشت (که از نظر محاسبه راحت تر به کار می رود)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]$$

این فرمول را یونانیان قدیم نیز می شناخته و از آن استفاده می کرده اند .

به عنوان مثال اگر $a = 2$ و $x_0 = 1$ اعداد زیر ، که تقریب هایی از $\sqrt{2}$ هستند ، به دست می آیند .

$$x_1 = 1/5$$
$$x_2 = 1/416$$
$$x_3 = 1/414215686 \qquad (9D)$$
$$x_4 = 1/414213562 \qquad (9D)$$

۲ـ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x + \cos x = 0$ را با تقریب اولیهٔ $x_0 = -0/7$ حساب کنید .

با توجه به این که

$$f(x) = x + \cos x$$

داریم

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

و فرمول نیوتن چنین خواهد بود

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \cos x_n}{1 - \sin x_n}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیرند (توجه کنید که ماشین حساب در وضعیت (MODE) رادیان باشد) .

$$x_1 = -0/73943649 \qquad (8D)$$
$$x_2 = -0/73908515 \qquad (8D)$$
$$x_3 = -0/73908513 \qquad (8D)$$

لازم به ذکر است که

$$f(x_3) = 5/383 \times 10^{-9}$$

که عدد بسیار کوچکی است و مؤید این که x_3 بسیار دقیق است .

۲ـ۸ـ۳ همگرایی روش نیوتن (مطالعه)

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است ، زیرا اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ را به صورت

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

بنویسیم و آن گاه در معادلهٔ قبلی بالا هم صدق می کند . یعنی ،

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \alpha \qquad f(\alpha) = 0 \qquad (۲ . ۲۳)$$

و فرمول نیوتن عبارت است از ، (امتحان کنید) .

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

بنابر این ، برای بحث در همگرایی روش نیوتن ، باید شرایط برقراری روش تکرار ساده را با $g(x)$ تعریف شده در (۲ . ۲۳) بررسی کنیم . برای این منظور را حساب می کنیم (فرض می کنیم تابع f مشتق دوم پیوسته دارد) .

$$g'(x)$$

$$g'(x)=1-\frac{\left(f'(x)\right)^2-f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}=\frac{f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

حال فرض می کنیم که (یعنی ، α را ریشهٔ ساده فرض می کنیم)

$$f'(\alpha)\neq 0 \qquad (۲ . ۲۴)$$

در این صورت ،

$$g'(\alpha)=0$$

چون $g'(x)$ پیوسته است پس به ازای هر ε، یک همسایگی از α هست به قسمی که به ازای هر x از این همسایگی

$$\left|g'(x)-g'(\alpha)\right|=\left|g'(x)\right|<\varepsilon$$

بنابر این ، اگر ε را عددی کوچکتر از یک فرض کنیم شرط قضیهٔ ۲ـ۶ـ۴ برقـرار اسـت و اگر x_0 از این همسایگی اختیار شود دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصـل مـی شود همگراست . به علاوه ، چون $g'(\alpha)=0$ ، بنابر قضیهٔ ۲ـ۷ـ۳ ، مرتبهٔهمگرایی $\{x_n\}$حداقل دو است .

ضمنا با توجه به قضیهٔ ۲ـ۷ـ۳ ، اگر $g''(\alpha)\neq 0$ مرتبهٔ همگرایی دقیقا دو است . در اینجا

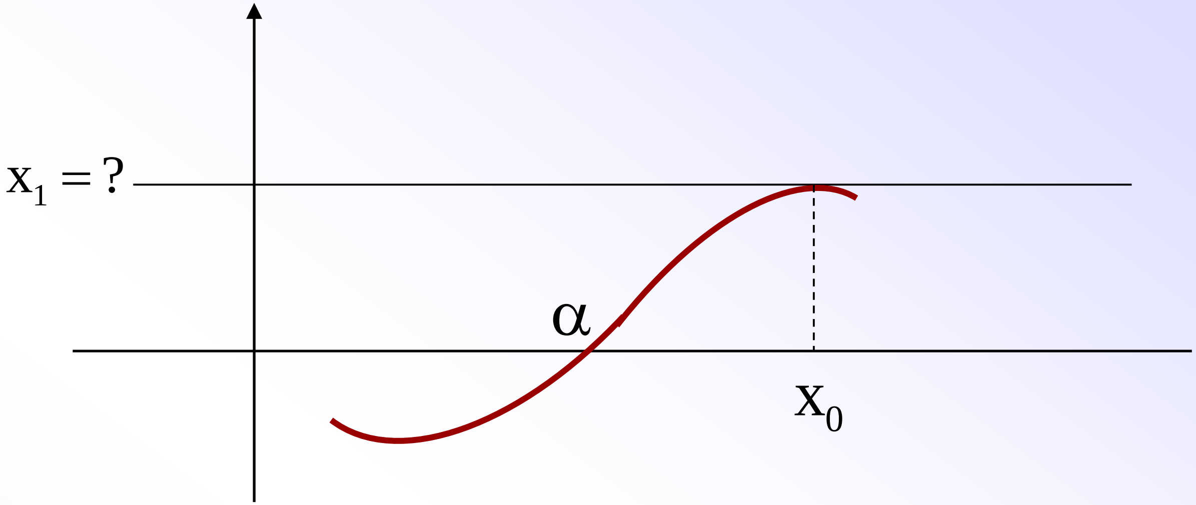
$$g''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

(تحقیق کنید)

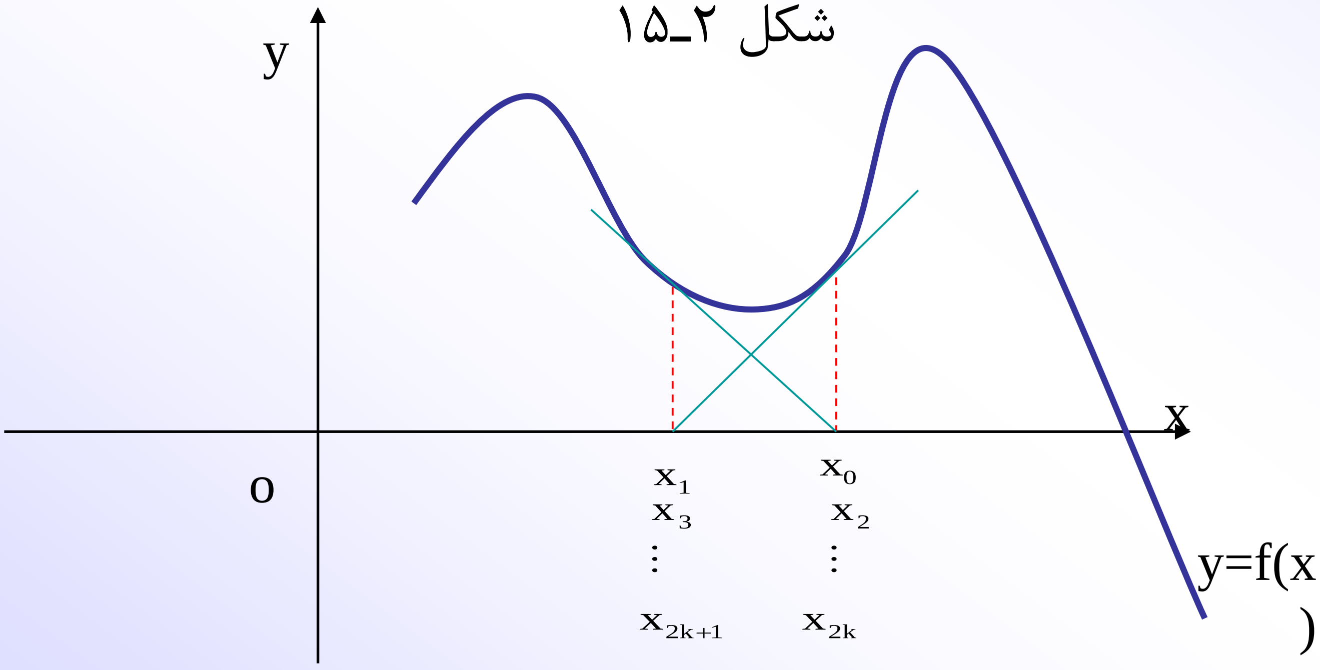
بنابر این ، با توجه بـه (۲ . ۲۴) ، اگـر $f'(\alpha)f''(\alpha)\neq 0$ آن گـاه مرتبـهٔ همگرایـی روش نیوتن دو است .

۲ـ۸ـ۴ خصوصیات روش نیوتن

الف) اشکال اساسی روش نیوتن آن است که ، آن همسایگی که در آن $|g'(x)|<1$ ، ممکن است بسیار کوچک باشد ، به عبارت دیگر x_0 باید بسیار نزدیک بـه α باشـد تـا جملات دنبالهٔ حاصل از روش نیوتن به α همگرا باشند . شکل های زیـر واگرایـی روش نیوتن و نوسان بین دو نقطه را نشان می دهند . برای رفع این مشکل ابتدا ، به وسـیلهٔ یکـی از روش های همیشه همگرا ، تقریبی نزدیک به α به دست می آورنـد و بعد این تقریب را x_0 می گیرند و از روش نیوتن استفاده می کنند .



شکل ۲ـ۱۵



ب) اشکال دوم روش نیوتن لزوم موجود بودن $f'(x_0)$ و محاسبه آن در نقاط

x_n است و این که همواره $f'(x_n) \neq 0$ ؛ گاهی تابع f مشتق ندارد ، که در نتیجه

امکان استفاده از فرمول نیوتن نخواهد بود ، ویا شکل $f'(x_0)$ و محاسبه آن

پیچیده است رفع این مشکل را در ۲-۱۰ بررسی می کنیم.

ج) مزیت عمده روش نیوتن ، در صورت همگرایی ،سرعت سریع آن است که

جذابیت و کاربرد آن را فزونی بخشیده است.

فصل سوم

درونیابی

مقدمه

در ریاضیات محض ، بخصوص در آنالیز ریاضی ، معمولا با توابعی سرو کار داریم که با یک یا چندضابطه تعریف شده اند. یعنی ، به ازای هرمقدار متغیر ،دستوری برای تعیین مقدارتابع داده شده است . اما ، درعمل به ندرت باچنین وضعی روبه رو می شویم واکثراتوابعی که بایدمورد بررسی قرارگیرند مقدارشان به ازای بعضی از مقادیر متغیرو آن هم از طریق آزمایش و یا اندازه گیری به زحمت قابل تعیین است.

به بیان دقیق مقادیر تابع f به ازای نقاط دو به دو متمایز

$x_0 , x_1 , x_2 ,\ldots, x_n$

به ترتیب عبارتند از:

$f_0 , f_1 , f_2 ,\ldots, f_n$

یک چنین تابعی را تابع جدولی نامیم . نمو نه هایی از این توابع را می شناسید،توابع مثلثاتی وتابع لگاریتم که مقدار آنها به ازای بعضی از مقادیر متغیر درجدولهایی درج شده است .

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x_0 < x < x_n$ و $i = 1,2,\ldots,n-1$

$x \neq x_i$

وبرونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0, x_n]$.

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با مفاهیم فوق کاربردهای عملی آنها را در تخمین جمعیت در سال های آینده ویا برآورد توابع مختلف دیگر خواهیم دید .

هدفهای کلی

۱- آشنایی با مفاهیم درونیابی و برونیابی

۲- معرفی چند جمله ای درونیاب

۳- تعیین چند جمله ای درونیاب به روش لاگرانژ و بیان معایب این روش

۴- تعیین چند جمله ای درونیاب به روش تفاضلات تقسیم شده و مزایای آن

۵- تعیین خطای چند جمله ای درونیاب و روش مینیمم کردن آن

۶- معرفی تفاضلات متناهی و کاربرد آنها در تعیین درجه چندجمله ای درونیاب و سرعت بخشیدن به همگرایی دنباله های همگرا

۷- ارائه فرمولهای نیوتن، برای چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات متناهی

۸- معرفی درونیابی معکوس وکاربرد آن

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱- مفاهیم درونیابی و برونیابی را بیان وکاربردهایی از آنها را ارائه کند .

۲- چند جمله ای درونیاب مربوط به یک تابع جدولی را به روشهای گوناگون حساب کنید.

۳- کران بالایی برای خطای چند جمله ای درونیاب حساب کند .

۴- جدول تفاضلات یک تابع جدولی را تشکیل و اطلاعات لازم را از آن کسب و چند جمله ای درونیاب را از آن به دست آورد .

۱-۴ مفهوم درونیابی

درریاضیات از دیرباز توابع جدولی ، یعنی توابعی که مقادیرآنهادرنقاطی ازحوزه

تعریف آنها در یک جدول ثبت شده است ، مورد استفاده قرار می گرفته اند .

همه با جدول مقادیرتوابع $\sin$ ، $\cos$ ، tg و $\cot g$ به ازای ۰،۱،۲،...،۴۵ درجه

آشناهستید ، همچنین باجدول مانتیس لگاریتم اعداد . آنچه دردبیرستان برای

تعیین ، مثلا سینوس۳۷درجه و۴۰دقیقه انجام می دهید درونیابی خطی است

که در اینجا آنرا بررسی می کنیم . باپیدایش ماسین حساب وکامپیوتر جدولهای

مذکور دیگر به کار نمی روند و درونیابی بیشتر

هنر شناخت معانی ومفاهیم مستتر در یک جدول

است . یکی از این معانی ، تخمین مقدار یک تابع به ازای مقداری از x است که در جدول نیست ، ولی بین نقاط جدولی است . این همان مفهوم درونیابی است .

برای تخمین $f(x)$ وقتی f باجدول زیر داده شده است

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_n

راههای متفاوتی وجود دارد . یکی از راههای نسبتا ساده این است که یک چند جمله ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدارآن در x_i همان f_i باشد ، البته به ازای $i=0,1,2,...,n$ یعنی داشته باشیم

$$P(x_i)=f_i \qquad i=0,1,2,...,n \qquad ❉$$

وبعد به جای $f(x)$ در بازه $[x_0,x_n]$ ، با $P(x)$ کار کنیم . اکنون سوالاتی به صورت زیر مطرح می شود :

الف) چرا یک چند جمله ای پیدا می کنیم ؟ مگر چندجمله ای چه خصوصیتی داردکه دیگر توابع ندارند؟

ب) آیا یک چند جمله ای که در ❉ صدق کند همیشه وجود دارد؟ و در صورت وجود منحصر به فرد است؟

ج) آیاتعیین این چندجمله ای برای n های بزرگ عملی است ؟

درپاسخ به سوال (الف) ، همه می دانیم که محاسبه یک چندجمله ای به ازای مقداری از x_i بسیار ساده است (روش هورنر از فصل سوم) . همچنین محاسبه مشتق و انتگرال توابع چندجمله ای و حتی تعیین ریشه های یک معادله چندجمله ای مشکل نیست .

جالب این که ، درصورت متمایزبودن نقاط ، جواب سوال(ب)مثبت است و همیشه یک چندجمله ای منحصربه فردوجوددارد و راههای ساده ای برای تعیین آن می شناسیم . این مطالب را دردیگربخشهای این فصل موردبررسی قرارخواهیم داد .

۲-۴ چند جمله ای های لاگرانژ

یکی ازروشهای تعیین یک چندجمله ای حداکثراز درجه که در n صدق کند ، روش لاگرانژ است . در این روش فرض می کنیم $L_n(x),\dots,L_1(x),L_0(x)$ هر یک، یک چندجمله ای درجه n باشند وداشته باشیم

$$P(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1+\dots+L_j(x)f_j+\dots+L_n(x)f_n$$

و سعی می کنیم $L_j(x)$ ها را چنان تعیین کنیم ک

$$P(x_i)=f_i \qquad i=0,1,2,\dots,n$$

برای این منظورمی گوییم به ازای $i = 0,1,2,\dots,n$ باید داشته باشیم

$$P(x_i) = L_0(x_i)f_0 + \dots + L_j(x_i)f_j + \dots + L_n(x_i)f_n \qquad **$$

لذا کافی است (ودرصورت مستقل بودن $L_i(x)$ ها از یکدیگرلازم است) داشته باشیم

$$\begin{cases} L_j(x_i) = 0 \\ L_j(x_j) = 1 \end{cases} \qquad \text{و} \quad i \neq j \qquad ***$$

اما ، تابع زیر

$$(x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n) \qquad (۴.۴)$$

به ازای $x_0 , x_1 , \dots , x_{j-1} , x_{j+1} , \dots , x_n$ صفر است ، یعنی به ازای x_i هایی که

$i \neq j$ ، کافی است کاری کنیم که مقدار این تابع به ازای x_j یک شود و این کار با

تقسیم تابع مندرج در (۴.۴) بر عدد

$$(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)$$

امکان پذیر است. به عبارت دیگر

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)} \qquad (۵.۴)$$

به سادگی می توانید آزمایش کنید که شرایط ❊❊❊ برقرارند. چندجمله ایهای درجه n که به وسیله (۵.۴) بیان می شوند به چندجمله ایهای لاگرانژ معروف اند.

۴-۲-۱ مثال

چندجمله ای $P(x)$ راکه مربوط به تابع جدولی زیر است حساب کنید.

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل:

در این مثال $n=2$ و در نتیجه چند جمله ایهای لاگرانژ از درجه دو هستند .

چند جمله ایهای لاگرانژ به قرار زیرند:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=\frac{x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}=\frac{x^2+x}{2}$$

از این رو، بنابر فرمول ** داریم

$$P(x)=1\times L_0(x)+1\times L_1(x)+3\times L_2(x)=\frac{x^2-x}{2}-(x^2-1)+\frac{3(x^2+x)}{2}$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

تحقیق کنیدکه $L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)=1$

تذکر: چندجمله ای $P(x)$ را می توان به روش ضرایب مجهول نیز به دست آورد.

به این معنا که فرض می کنیم $P(x)=ax^2+bx+c$

و قرار می دهیم $P(1)=3$ و $P(0)=1$ و $P(-1)=1$

که درنتیجه یک دستگاه سه معادله ، سه مجهول حاصل می شود که جواب آن

خواهد بود (امتحان کنید) . امادرعمل n می تواند بزرگ باشد و نقاط $a=b=c=1$

نزدیک به هم ، که درنتیجه حل یک دستگاه شامل $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهول را با

اشکالاتی مواجه می کند.

۴-۲-۲ مثال

بااضافه کردن نقطه (۲.۷) به تابع جدولی مثال (۴-۲-۱) مجددا چندجمله ای $P(x)$ را حساب کنید . به عبارت دیگر، چندجمله ای مربوط به جدول زیر را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

حل:

در این مثال $n = 3$ و چند جمله ایهای لاگرانژ همه از درجه ۳ هستند . این چند جمله ایها عبارت اند از:

$$L_0(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}=\frac{x^3-x}{6}$$

درنتیجه چندجمله ای $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) + 7 \times L_3(x)$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + \frac{3(x^3 - x^2 - 2x)}{-2} + \frac{7(x^3 - x)}{6}$$

که پس ازساده کردن نتیجه می شود

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

ضمنا ازطریق محاسبه معلوم می شودکه

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = 1$$

مشاهده می شود که $P(x)$ ازدرجه ۲ است ولی $L_i(x)$ها از درجه ۳ هستند. ضمنا از محاسبات مربوط به مثال (۴-۲-۱) کمتر استفاده شد .

یعنی، با اضافه کردن یک نقطه به جدول باید تقریبا تمام عملیات را از سرگرفت. حجم عملیات نیزبا افزایش n به سرعت بالا می رود.درضمن درجه چندجمله ای درونیاب قبل از تعیین کامل آن معلوم نمی شود. قضیه زیر نشان می دهد که چندجمله ای $P(x)$ که در *صدق می کند منحصر به فرد است.

۴-۲-۳ قضیه

فقط یک چند جمله ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه n ، وجود دارد که در شرط زیر صدق می کند:

$$P(x_i) = f_i \quad \text{و} \quad i = 0,1,2,\dots,n \qquad (۶.۴)$$

۴-۲-۴ تعریف

چند جمله ای منحصر به فرد $P(x)$ که در (۶.۴) صدق می کند چند جمله ای درونیاب یا چند جمله ای هم محل تابع f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نامیده می شود .

روش لاگرانژ برای تعیین چندجمله ای درونیاب تنها از لحاظ نظری مورد توجه است ولی همان گونه که در مثال ۴-۲-۲ نشان داده شد از لحاظ عددی معایب زیادی است .

۴-۲-۵ معایب روش لاگرانژ

۱- محاسبات این روش ، وقتی n خیلی هم بزرگ نباشد ، زیاد است و خودکارکردن عملیات نیز ساده نیست .(به این مطلب فکر کنید که چگونه می توان ضرایب توان های مختلف x رادرهر یک ز چندجمله ایهای لاگرانژ باکامپیوتر حساب کرد).

۲- درجه چند جمله ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می شود و با اضافه کردن یک یا چندنقطه به نقاط جدولی باید تقریبا تمام عملیات رااز سرگرفت.

۳- چون چند جمله ای درونیاب به تدریج حساب نمی شود این روش را باید با احتیاط کامل به کار برد (مثال زیر را مطالعه کنید).

۴-۲-۶ مثال

جدول مربوط به تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ داده شده است مطلوب است تخمین $\sqrt[3]{20}$

با استفاده از درونیابی لاگرانژ .

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

حل :

باتوجه به تعریف چندجمله ایهای لاگرانژ داریم(توجه کنیدکه $f_0=0$ و $L_0(x)\times f_0=0$

)

$$P(x)=\frac{x\,(x-8)\,(x-27)\,(x-64)}{1\,(-7)\,(-26)\,(-63)}\times 1+\frac{x\,(x-1)\,(x-27)\,(x-64)}{8\,(7)\,(-19)\,(-56)}\times 2$$

$$+\frac{x(x-1)\,(x-8)\,(x-64)}{27(26)\,(19)\,(-37)}\times 3+\frac{x(x-1)\,(x-8)\,(x-27)}{64(63)\,(56)\,(37)}\times 4$$

برای تخمین $\sqrt[3]{20}$ به جای x قرار می دهیم ۲۰ خواهیم داشت

$$\sqrt[3]{20}\cong P(20)=-1/3139 \qquad (4D)$$

با رسم منحنی مشاهده می شود برآورد $\sqrt[3]{20}$ منفی است! علت چیست ؟

$$y=\sqrt[3]{x}$$

در فاصله [۸.۲۷] معلوم می شود که شکل منحنی نزدیک به یک خط راست است .

لذا ، اگر در این فاصله چند جمله ای درونیاب درجه اول را به دست آوریم حاصل می شود

$$P_1(x)=\frac{x-27}{8-27}\times 2+\frac{x-8}{27-8}\times 3$$

وبه دست می آید

$$\sqrt[3]{20}\cong P_1(20)=\frac{14}{19}+\frac{36}{19}=\frac{50}{19}=2/6316$$

که از $\sqrt[3]{20}=2/7144(4D)$ خیلی دور نیست .

۳-۴ روش تفاضلات نیوتن

می دانیم که یک چندجمله ای را به طرق مختلف می توان نوشت . درفرمـــــول (۲.۴)، برای چند جمله ای درونیاب ، این چند جمله ای بر حسب ترکیب خطی خاصی از چند جمله ایهای لاگرانژ نوشته شده است . ولی می توان n چند جمله ای مستقل خطی دلخواه در نظر گرفت و $P(x)$ را بر حسب ترکیبی خطی از آنها نوشت . اگر چند جمله ایهای زیر را در نظر بگیرید .

$$1,(x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\ldots,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

می توان نشان داد که این چند جمله ایها مستقل خطی هستند . اکنون فرض کنید $P(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد و

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $P(x_i) = f_i$ می توان a_i ها را به دست آورد.

مثلا با قرار دادن $x = x_0$ داریم

$$P(x_0) = a_0$$

و چون باید $P(x_0) = f_0$ پس ،

$$a_0 = f_0 \qquad (۷.۴)$$

با قرار دادن $x = x_1$ به دست می آوریم

$$P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

که با توجه به (۷.۴) واینکه $P(x_1) = f_1$ نتیجه می شود

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

و به همین ترتیب بقیه a_i ها بر حسب نقاط وf_i ها به دست می آیند .

نیوتن با توجه به مقادیری که برای ضرایب به دست می آیند تفاضلات تقسیم شده را معرفی ویک فرمول بازگشتی برای محاسبه آنها ارائه کرد .

۴-۳-۱ تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \ldots, f_n$ مقادیر تابع f دراین نقاط باشد.

تفاضلات تقسیم شده اول بین x_i و x_{i+1} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

بنابراین

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \qquad ,$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده دوم بین x_i ، x_{i+1} و x_{i+2} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

به عنوان مثال

$$f[x_0, x, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده n ام بین نقاط $x_n, \ldots, x_1, x_0$ عبارت است از:

$$f[x_0, x, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

همچنین اگر x نقطه دلخواهی از (x_0, x_n) باشد و

$$x \neq x_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

تفاضلات تقسیم شده بین $x_n, \dots, x_1, x_0, x$ عبارت است از:

$$f[x, x_0, x, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

۴-۳-۲ مثال

با استفاده از جدول ذیل تفاضلات تقسیم شده مربوط به تابع f را حساب کنید.

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	-1	1	1	5	19

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	تفاضلات سوم	تفاضلات چهارم
-1	-1				
		$\frac{-1-1}{-1-0}=2$			
0	1		$\frac{2-0}{-1-1}=-1$		
		$\frac{1-1}{0-1}=0$		$\frac{-1-2}{-1-2}=1$	
1	1		$\frac{0-4}{0-2}=2$		$\frac{-1-1}{-1-3}=0$
		$\frac{1-5}{1-2}=4$		$\frac{2-5}{0-3}=1$	
2	5		$\frac{4-14}{1-3}=5$		
		$\frac{5-19}{2-3}=14$			
3	19				

جدول ۱

خلاصه جدول بالا چنین است :(پس از حل چند تمرین نیازی به نوشتن کسرها نیست.)

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-1	-1				
		2			
0	1		−1		
				1	
		0			0
1	1		2		
		4		1	
2	5		5		
		14			
3	19				

جدول ۲

۳-۳-۴ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید . سپس با اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

x_i	−1	0	1
f_i	1	1	3

حل:

با توجه به مثال قبل داریم:

(ضمناً زیر اعدادی که پس از اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ حاصل می شوند خط کشیده شده است.)

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	1			
		0		
0	1		1	
		2		$\underline{0}$
1	3		$\underline{1}$	
		$\underline{4}$		
2	7			

جدول ۳

قضیه زیر نشان می دهد که از جدول تفاضلات می توان درجه چند جمله ای درونیاب را ، قبل از به دست آوردن آن ، معین کرد. مثلاً جدول (۲) نشـــان می دهد که چند جمله ای درونیاب f از درجه ۳ است . ضـــــمناً جدول (۳) نشان می دهد که با اضافه کردن نقطه (2, 7) درجه چند جمله ای درونیاب تغییر نمی کند و برابر ۲ است.

۴-۳-۴ قضیه (فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن)

چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_n,\dots,x_1,x_0$ عبارت از

$$P(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

۴-۳-۵ مثال

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفا ضلات تقسیم شده به دست آورید و $f(\frac{1}{2})$ را بر آورد کنید.

x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	0	7	26

حل:

باتوجه به جدول بالا جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می دهیم.

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	-2			
		1		
1	0		2	
		7		1
2	7			
			6	
		19		
3	26			

از این رو ، بنابر تعاریف برای چند جمله ای درونیاب ، داریم

$$P(x) = -2 + (x+1)\times 1 + (x+1)(x-1)\times 2 + (x+1)(x-1)(x-2)\times 1$$
$$= -2 + x + 1 + 2x^2 - 2 + x^3 - 2x^2 - x + 2$$

که در نتیجه،

$$P(x) = x^3 - 1$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8}$$

۱۱-۴ برازش منحنی

واقعیت این است که مقادیر f_i در یک تابع جدولی تقریبی هستند زیرا از طریق اندازه گیری یا آزمایش به دست می آیند . بنابراین ، اصرار در این که چند جمله ای درونیاب درنقاط x_i مقدار f_i را داشته باشد بیهوده است. در عمل اکثراً نقاط جدولی را به وسیله یک منحنی چنان برازش می کنند که خطا به نوعی حداقل باشد.

۴-۱۱-۱ تعریف

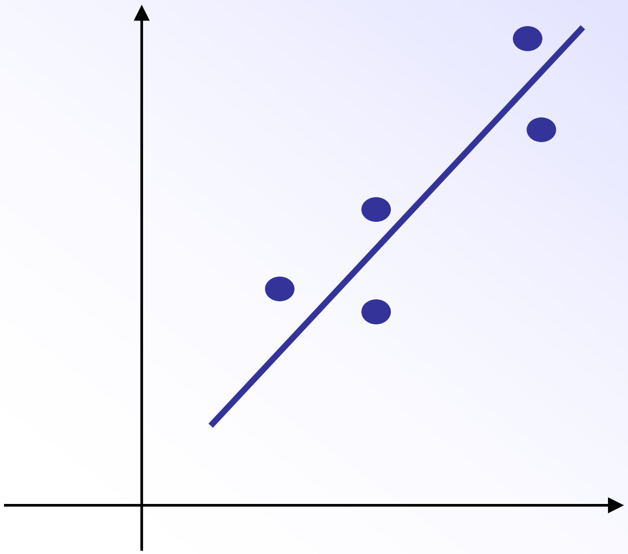
فرض کنید نقاط (x_i, y_i) ، $i=1,2,\dots,n$ ، مفروض باشند. و چند جمله ای P(x)

چنان باشد که

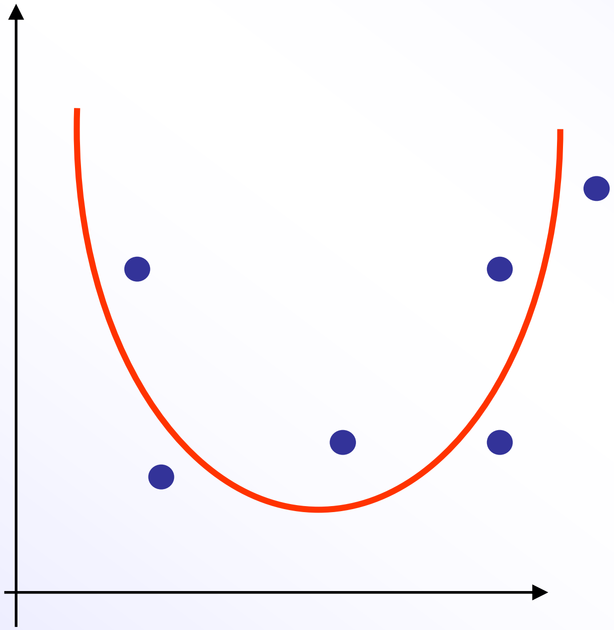
$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - P(x_i)\right)^2$$

کمترین مقدار را داشته باشد . در این صورت P(x) را چند جمله ای تقریب

کمترین مربعات برای داده های (x_i, y_i) ، $i=1,2,\dots,n$ ، نامند.



(الف) خط کمترین مربعات



(ب) سهمی کمترین مربعات

در حالت کلی برای به دست آوردن P(x) فرض کنید که

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \ , \quad (a_m \neq 0)$$

چند جمله ای کمترین مربعات درجه m باشد . برای به دست آوردن ضرایب P(x)

باتوجه به * قرار می دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \ , \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

معادلات بالا تشکیل یک دستگاه شامل m+1 معادله برای m+1 مجهول $a_m, \dots, a_0$

می دهد.

۴-۱۱-۲ خط کمترین مربعات

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات برای برازش n نقطه مفروض $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ است . در این روش

$$P(x) = ax+b$$

و باید a و b را چنان تعیین کرد که

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

مینیمم باشد . از این رو ، قرار می دهیم :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

اما داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2\left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0 \end{cases}$$

پس از ساده کردن ، معادلات بالا دستگاه زیر را نتیجه می دهند

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a + \left(n\sum_{i=1} x_i \right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

از دستگاه بالا مقادیر a وb به دست می آیند که توسط آنها خط کمترین مربعات $y = ax + b$ مشخص می شود.

۴-۱۱-۳ مثال

خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدول زیر را تعیین کنید.

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0	1	2	2	3

حل:

در این مثال داریم:

$$n=5 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 10$$

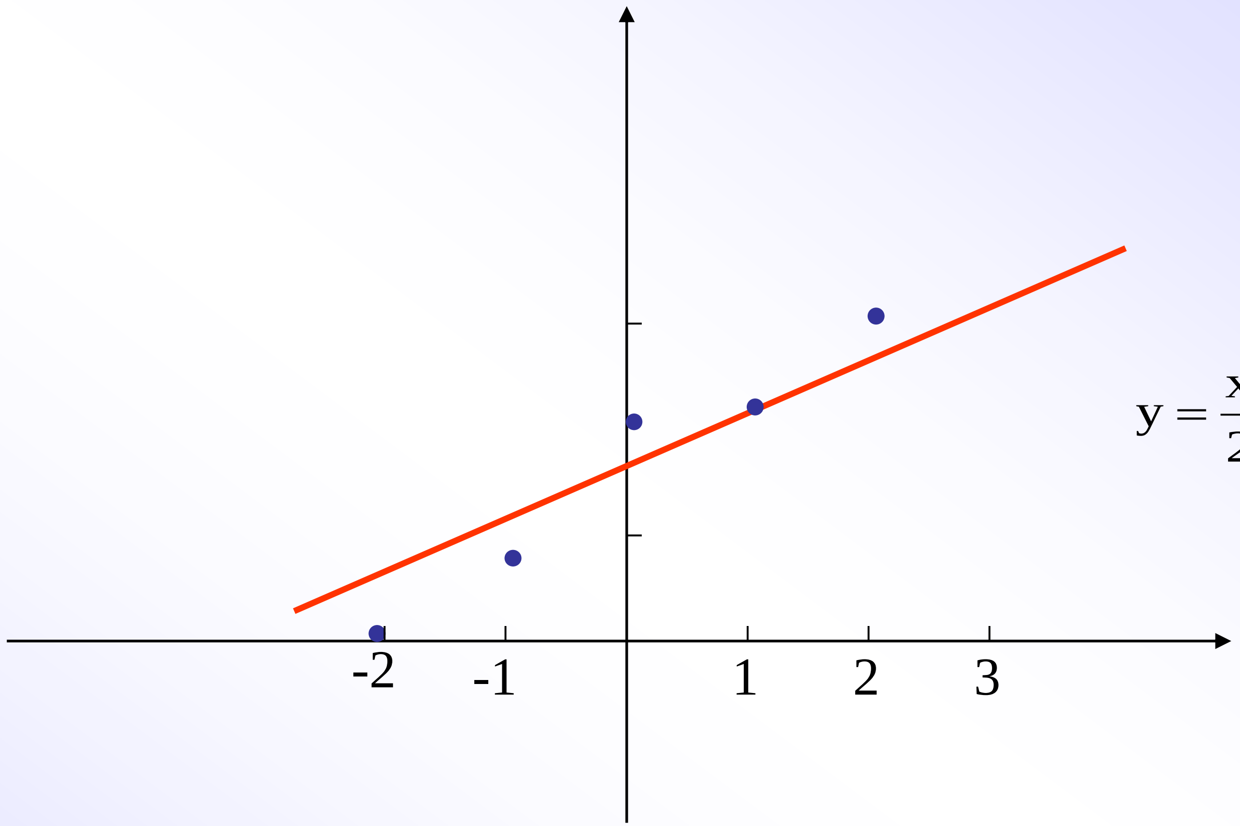
$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 7 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 8$$

بنابراین

$$\begin{cases} 10a = 7 \\ 5b = 8 \end{cases}$$

که از آن نتیجه می شود

$$b = \frac{8}{5} \quad , \quad a = \frac{7}{10}$$



$y = \frac{x}{2} + \frac{8}{5}$ خط

فصل پنجم

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

مقدمه

در ابتدای این فصل روشهای پیدا کردن تقریبهایی برای $f'(x)$ ، به ازای مقادیر مختلف x را ارائه می کنیم . سپس به تعیین تقریب برای

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

می پردازیم. همان گونه که می دانید توابع فراوانی موجودند که تابع اولیه ندارند،یعنی تابعی چون $F(x)$ نیست که به ازای $a \le x \le b$

$$F'(x) = f(x).$$

از این رو، محاسبهٔ این انتگرالها با روش عادی امکان پذیر نیست. از این جمله اند انتگرالهای زیر که اغلب کاربردهای عملی دارند.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-(\sin k)^2 \sin^2 x}}$$ (انتگرال بیضوی)

در این فصل روشهایی ارائه می کنیم که به وسیلهٔ آنها می توان تقریبی از یک انتگرال معین را تا هر درجهٔ دقت حساب کرد (البته در حد دقتی که وسایل محاسباتی دارند).

هدفهای کلی

۱. روشهای برآورد $f'(x)$ به ازای x های مختلف و تعیین خطای آن

۲. بیان اشکالات مشتقگیری

۳. شرح قاعدهٔ ذوزنقه ای برای برآورد یک انتگرال معین و تعیین خطای آن

۴. شرح قاعدهٔ سیمسون و تعیین خطای آن

۵. شرح قاعدهٔ رامبرگ وکاربرد آن

۶. شرح منشأ قواعد انتگرالگیری و ارائهٔ فرمولهای نیوتن -کاتس و گاوس

۷. تخمین بعضی انتگرالهای ناسره

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند :

۱. تخمینی از $f'(x)$ ، وقتی x و تابع جدولی f معلوم است، را حساب کند . ۲. روشهای انتگرالگیری مناسب را برای برآورد یک انتگرال معین به کار برد وتقریبی از یک انتگرال را حساب کند که خطایی کمتر از ε مفروض داشته باشد .

۳. تقریبی از انتگرالهای ناسره را به کمک روشهای خوانده شده حساب کند

۵. مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

کاربرد مشتق وانتگرال در ریاضیات مهندسی و دیگر علوم فراوان است ، و در حـل اکثر مسائـل از آنها اسـتفاده می شود . در آنـالیز ، که معمولاً ضابطه یا ضابطه هایی برای تعریف تابع ارائـه مـــی شود ، فرمولهایی نیز برای محاسبهٔ مشتق وانتگرال ، به شرط وجود ، به دست می آید . امـا ، اگر تـابع مورد نظر بـسیار پـیچیده باشد یا با تـابعی جـدولی سرو کـار داشتـه باشیم (که فرض می شود جدول مذکور از یک تابع مـشتق پذیر یا انتگرال پذیر ، ناشی شده است) بایـــد به روشهای عددی روی آورد .

۵-۱ مشتقگیری عددی

برای مشتقگیری عددی ، همان طور که قبلاً اشاره شده ، از چند جمله ای درونـیاب استفا ده می کنیم . در (۴ . ۳۶) چند جمله ای درونیاب f در x_i ، x_{i+1}، ... ، x_{i+k} را چنین به دست می آوردیم :

$$p(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_i \qquad (۱)$$

$$+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)}{4!}\Delta^4 f_i + \ldots + \frac{\theta(\theta-1)\ldots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k f_i$$

که در آن $x = x_i + \theta h$ و $x_{i+1} - x_i = h$ برای $i = 0, 1, \dots, n-1$.چون $P(x)$ بر

حسب θ ارائه شده ا ست می نویسیم

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} \qquad (۲)$$

اما داریم ، $dx = hd\theta$ که در نتیجه

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \qquad (۳)$$

بنابراین ، با مشتقگیری از (۱) و در نظر گرفتن (۲) و (۳)

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{2} + \frac{5\theta}{12} - \frac{1}{2}\right)\Delta^4 f_i \dots\right]$$

(۴)

اگر قرار دهیم $\theta=0$ ، با توجه به $x = x_i + \Theta h$ ، داریم $x = x_i$ و از (۴) نتیجه می شود

$$f'(x_i) = f_i' \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \frac{1}{2}\Delta^4 f_i + \ldots\right)$$

معمولاً برای محاسبهٔ تقریبـــی از f'_i یک چنـــــد جملــه ای از سمت راست انتخاب می شود .

مثلاً

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (۵)$$

ویا

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right) = \frac{1}{h}\left[f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)\right]$$

که در نتیجه

$$f'_i \simeq \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \qquad (۶)$$

ضمناً اگر قرار دهیم $\theta = \frac{1}{2}$ ، به توجه به $x = x_i + \theta h$ به دست می آوریم $x = x_i + \frac{1}{2}h$ و از (۴) نتیجه می شود :

$$f'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{48}\Delta^4 f_i + \ldots\right)$$

از ایـن رو ، اگـر تنها جملـــــۀ اول داخل پـرانتز سـمت راست را انتخاب

می کنیم

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

و اگر دو جملهٔ اول را منظورکنیم

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\simeq\frac{1}{h}\left(\Delta f_i-\frac{1}{24}\Delta^3 f_i\right)$$

۵- ۱-۱ مثال

با توجه به جدول زیر تقریبی از f_i' ، $i=0$ ،1 ،2 ،3 ، یک بار با استفاده از فرمول (۵) و بار دیگر با استفاده از (۶) حساب کنید .

x_i	0/1	0/15	0/2	0/25	0/3
f_i	1/10517	1/16183	1/22140	1/28403	1/34986

حل :

جدول تفاضلات f را با توجه به جدول بالا تشکیل دهیم .

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/05666		
			0/00291	
0/15	1/16183			
				0/00015
		0/05957		
			0/00306	
0/2	1/22140			
				0/00014
		0/06263		
			0/00320	
0/25	1/28403			
		0/06583		
0/3	1/34986			

از این رو ، با توجه به فرمولهای (۵ . ۵) و(۵ .۶) داریم $(h = 0/05)$

f_i	$f'_i \simeq \dfrac{\Delta f_i}{h}$	$f'_i \simeq \dfrac{\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i}{h}$
۱۰۵۱۷/۱	۱۳۳۲/۱	۱۰۴/۱
۱۶۱۸۳/۱	۱۹۱۴/۱	۱۶۰۸/۱
۲۲۱۴۰/۱	۲۵۲۶/۱	۲۲۰۶/۱
۲۸۴۰۳/۱	۳۱۶۶/۱	———

اعـداد f_i که در این مثال داده شده اند مربوط به تابع $f(x)=e^x$ هستند که مشتق آ ن با خودش برابر است . بنابراین ، در جدول اخیر ، باید اعداد مـوجود در هر سـه سـتـون یـکسان باشند ! که نـیستند . الــبته مـشاهده می شود اعدادی که از فرمول (۶) به دست آمده اند ، دقیقتر از اعـــدادی هستند که از (۵) به دست می آیند .

۵-۱-۲ مثال

با توجه به تا بع جدولی مثال (۵- ۱-۱) تقریبهایی $f'(x_i \frac{h}{2})$ ، با به کار بردن (۷) و (۸) حساب کنید .

حل :

با توجه به جدول تفاضلاتی که در مثال (۵ -۱ -۱) به دست آوردیم ، داریم :

$x_i+\frac{h}{2}$	$f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$	$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\simeq\frac{\Delta f_i}{h}$	$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\simeq\frac{\Delta f_i-\frac{1}{24}\Delta^3 f_i}{h}$
۱۲۵/۰	۱۳۳۱۵/۱	۱۳۳۲/۱	۳۳۸۰/۱
۱۷۵/۰	۱۹۱۲/۱ ۵	۱۹۱۴/۱	۱۹۱۲۸/۱
۲۲۵/۰	۲۵۲۳۲/۱	۲۵۲۶/۱	———
۲۷۵/۰	۳۱۶۵۳/۱	۳۱۶۶/۱	———

در جدول بالا دو ستون از سمت چپ فقط برای مقایسهٔ مقادیر به دست

آمده ،درج شده اند ، ضمناً در ستون آخر به دلیل عدم وجود $\Delta^3 f_2$ و

$\Delta^3 f_3$ بقیهٔ فقره ها حساب نشده اند . نتایج این جدول ، با توجه به این

که $f(x) = f'(x)$ نشان می دهند که $\frac{\Delta f_i}{h}$ بسیار نزدیک به $f'(x_i + \frac{h}{2})$

هستند . به عبارت دیگر ، $\frac{\Delta f_i}{h}$ که هم تقریبی از $f'(x_i)$ و هم تقریبی از

$f'(x_i + \frac{h}{2})$ است به $f'(x_i + \frac{h}{2})$ نزدیکتر است تا به $f'(x_i)$.

۱-۵ انتگرالگیری عددی

محاسبهٔ انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x)dx$$

که در آن a وb متناهی و $f(x)$ بر$[a,b]$ معین باشد، به روشهای تحلیلی، یـعنی با استفاده از تـابع اولـیه $f(x)$ ، غالباً یا مشکل است یا غیر ممکن . بنابرین ، حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای $f(x)$ نیز از انتگرال گیری عددی استفاده می شود . واضح است که انتگرال معین را می توان به عنوان مساحت سطح زیر منحنی $y = f(x)$ که محصـــور به محور X و خطوط x=a وx=b است ، تعبیر کرد و با تقسیم بازهٔ $[a,b]$ به زیر بازه ها و جمع کردن مساحتهای مربوط به این زیـــر بازه ها آن را محاسبه کرد .

با استفاده از این خاصیت و چند جمله ای درو نیاب می توان تقریبهای مناسبی برای

به دست آور د . $\int_a^b f(x)dx$

ابتدا روشی را به کار می بریم که در آن $[a,b]$ به n قسمت متساوی تقسیـــــم

می شود ، یعنی $[a,b]$ به زیر بازه های

$$[x_i, x_{i+1}] = h \ , \ i = 0,1,\dots,n-1$$

تقسیم می شود که در آن

$$x_{i+1} - x_i = h \ , \ i = 0,1,\dots,n-1$$

و در نتیجه

$$h = \frac{b-a}{n} \ ,$$

و بعد چند جمله ای درونیاب $P_m(x)$ در نقاط x_i ، x_{i+1} ، ... ، x_{i+m} ، با استفاده از (۴ . ۳۶) ،حساب می شود و بعد

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} Pm(x)dx$$

به دست می آید . با جمع کردن این مقادیر ، تقریبی برای

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x}^{x_n} f(x)dx$$

به دست می آ ید.در زیر،حالت هایی را که $m=1$ و $m=2$ بررسی می کنیم .

۵-۲-۱ قاعدهٔ ذوزنقه ای

در ایـن قـاعده چند جمله ای درونیاب تابع f را در نقاط x_i و x_{i+1} به دست می آوریم ، که یک خط است.معادلهٔ این خط عبارت است از (با توجه به۴ . ۳۷)

$$p_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i$$

در نتیجه ، با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i) h d\theta$$

$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i\right]_0^1$$

$$= h\left(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_i\right)$$

اگر به جای Δf_i قرار دهیم $f_{i+1} - f_i$ به دست می آوریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

بنابراین ، قرار می دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

با توجه به شکل ، در واقع مقدار تقریبی مساحت ذوزنقه ای است که با خطوط قائم هاشور زده شده است.از این رو(۵ . ۲۱) را **فرمول قاعــدهٔ ذوزنقه ای** می نامند

برای پیدا کردن فرمول تقریبی برای $\int_a^b f(x)$ می نویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{xi}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$+\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \ldots$$

$$+\frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n)$$

عبارت اخیر را ، با توجه به حرف اول کلمۀ لاتین معادل ذوزنقه ای $T(h)$ می نامیم .

بنابراین ،

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

شکل (۵ - ۲) نشان می دهد که هـــــرچه h کوچکتر اختیار شود خطا کمتر است ،

البته به بهای محاسبـــه مقدار تابع در نقاط بیشتری فرمول (۵ . ۲۲) را **فرمول قاعدهٔ ذوزنقه ای مرکب** می نامند .

۵-۲-۲ مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2dx$ را ، به روش ذوزنقه ای ، و به ازای $h=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ حساب و خطای این مقادیر را نیز تعیین کنید .

حل :

بنابر (۵ . ۲۲) داریم ، با توجه به این که $a=0$، $b=1$, $f(x)=x^2$ ،

$$T(1)=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{4}\left(0+2\times\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{2}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(0+2\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{9}{16}+1\right)=\frac{11}{32}$$

مقدار واقعی چنین حساب می شود !

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

ملاحظه می شود که هر چه h کوچکتر می شود $T(h)$ نیز به $\frac{1}{3}$ نزدیکتر می شود

خطای مطلق مقادیر حساب شده عبارت است از

$$T(1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$T(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

$$T(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}=\frac{11}{32}-\frac{1}{3}=\frac{1}{96}$$

ملاحظه می شود که وقتی h نصف می شود ، یعنی به جای ۱می شود $\frac{1}{2}$ ، خطا می شود($\frac{1}{4}$ یعنی) می شود $\frac{1}{6}$ ، که عدد $\frac{1}{24}$ است($\frac{1}{4}$) . بنابراین، $\frac{1}{6}$ چنین حدس زده می شود که خطا متناسب با h^2 است . درستی این حدس را بعداً ثابت می کنیم .

۵-۲-۳ مثال

۱- تقریبی از $\int_0^1 f(x)dx$ را با استفاده از جدول مقا دیر زیر حساب کنید.

x_i	۰	۲/۰	۴/۰	۶/۰	۸/۰	۱
f_i	۱	۲۲۱۴/۱	۴۹۱۸/۱	۸۲۲۱/۱	۲۲۵۵/۲	۷۱۸۳/۲

حل :

مشاهده می شود که در این مثال خبری از ضابطهٔ تابع f نیست . با توجه به نقاط جدولی

می توانیم قـــاعدهٔ ذوزنقه ای را با فرض $h=0/2$ به کار بریم .

$$T(0/2)=\frac{0/2}{2}(f(0)+2(f(0/2)+f(0/4)+f(0/6)+f(0/8))+f(1))$$

که با توجه به جدول مقادیر ، چنین نوشته می شود :

$$T(0/2)=0/1(1+2\times 6/7608+2/713)=1/72399$$

اعداد جدول بالا مربوط به مقادیر تابع $f(x)=e^x$ هستند ، برای این تابع داریم

$$\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1=1/71828 \quad (5D)$$

ملاحظه می شود که خطا برابر است با $1/72399-1/71828=0/00571$

۲- تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را با استفاده $h=\frac{\pi}{8}$ حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید .

حل :

$$T\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{16}\left(\sin 0+2\sin\frac{\pi}{8}+2\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{16}(0+2(0/38268+0/70711+0/92388)+1)$$

$$=\frac{\pi}{16}\times 5/02734.$$

بنابراین ،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq T\left(\frac{\pi}{8}\right)=0/98712$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

مقدار واقعی انتگرال عبارت است از

$$\text{مقدار واقعی} - T\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-0/98712=0/01288$$

۵-۲-۶ قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته و تابع g در این بازه انتگرالپذیر باشد و تغییر علامت ندهد (یعنی ، همواره نا منفی یا همواره مثبت باشد) در این صورت ،

$$\int_c^d g(x)h(x)dx = h(\eta)\int_c^d g(x)dx$$

که $\eta \in [c,d]$

۵-۲-۷ قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c \le x \le d} h(x) \le \zeta \le \max_{c \le x \le d} h(x)$$

آن گاه ηی هست که

$$c \le \eta \le d \quad , \quad h(\eta) = \zeta$$

به عبارت دیگر ، هر تابع پیوسته بر یک بازۀ بسته و محدود ، هر مقدار بیـن ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه ای از حوزۀ تعـریفش اختیار می کند .

۵-۲-۸ قضیه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه ای از فرمول زیر به دست می آید

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)$$

که در آ ن η_i بین x_i و x_{i+1} است ، به شرط آن که $f''(x)$ پیوسته باشد.

۵-۲-۹ قضیه

با توجه به علا مات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f''(x)$ بر $[a,b]$

$$ET(h) = \int_a^b f(x)dx - T(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \ ,$$

که $a \le \eta \le b$.

۵-۲-۱۰ نتیجه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه ای مرکب متناسب با h^2 است واین قاعده برای توابع چند جمله ای

حد اکثر از درجهٔ اول دقیق است .

۵-۲-۱۱ نتیجه

اگر M^2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد ، یعنی

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x)| \le M_2$$

آن گاه

$$|ET(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

مثال ۵-۲-۱۲

تقریبی از $\int_0^1 x\sin x\,dx$ را به قاعدهٔ ذوزنقه ای ، حسب کنید که خطای آن از 10^{-2} کمتر باشد .

حل : ابتدا M_2 را به دست می آوریم . برای این منظور مشتق مرتبهٔ دوم را حساب می کنیم .

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x\cos x \;,\; f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

بنابراین ، با توجه به این که $0 \le x \le 1$

$$|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x| \le 2|\cos x| + |x||\sin x| \le 2 + 1\times1 = 3$$

پس ، $M_2 = 3$ و h را از نامساوی زیر به دست می آوریم .

$$\frac{b-a}{12}h^2M_2=\frac{h^2}{12}\times 3=\frac{h^2}{4}\leq 10^{-2}$$

که از آن نتیجه می شود

$$h\leq 0/2$$

از این رو ، قرار می دهیم h= ۲/۰ و $T(h)$ را حساب می کنیم (اعداد میانی را تا چهار رقم اعشار گرد می کنیم) .

$$T(0/2)=\frac{0/2}{2}(0+2(0/2\sin 0/2+0/4\sin 0/4+0/6\sin 0/6+0/8\sin 0/8)+\sin 1)$$

$$=0/1(0+2(0/03973+0/15577+0/33879+0/57388)+0/84147)$$

$$=0/30578$$

با محاسبهٔ جواب واقعی به طریق زیر خطای $T(h)$ نیز حساب می شود .

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = (\sin x - x\cos x)\Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1 = 0/84147 - 0/54030$$

$$= 0/30117 (5D)$$

بنابراین ،

$$|ET(h)| = |0/30117 - 0/30578| = 0/00461$$

ملاحظه می شود که $|ET(h)| < 10^{-2}$

۳-۵ قاعده سیمسون

همانگونه که از (5-2-11) , (5-2-12) مشهود است قاعده ذوزنقه ای بسیار کند است . به عبارت دیگر ، برای بدست آوردن تقـریبی نه چندان دقیق باید تابع را در نقاط بسیاری محاسبه کرد . روش سیمسون بـــــرای محاسبات دستی بسیار ساده و نسبتا دقیق است .

این روش بر اساس جایگزین کردن یک چند جمله ای درجه دوم ، به جای تابع f ، در $[x_i , x_{i+2}]$ به دست می آید.

۵-۳-۱ فرمول قاعده سیمسون

ابتدا چند جمله ای درونیاب f را در نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} می نویسیم. این چند جمله ای بنابر (38-4) عبارت است از

$$P(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i$$

بنابراین قرار می دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx$$

و انتگرال سمت راست را محاسبه می کنیم.

با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$ داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \int_0^2 \left(f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i\right) h d\theta$$

$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4}\right)\Delta^2 f_i\right]_0^2$$

بنابراین

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = h\left[2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3}\Delta^2 f_i\right]$$

که با توجه به روابط

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad , \quad \Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

چنین ساده می شود

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

بنابراین فرمول قاعده سیمسون عبارت است از

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right) \qquad (❉)$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمسون در سراسر بازه $[x_0, x_n]$، چون (❉)

تقریبی برای بازه $[x_i, x_{i+2}]$ است لذا باید n زوج باشد تا بتوان(❉) را به کار برد.

با فرض زوج بودن n داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

با به کار بردن (❋) به ازای i=0 , 2 , … , n-2 به دست می آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

عبارت اخیر را با توجه به حرف اول کلمه سیمسون ، S(h) می نامیم . بنابراین ،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

این فرمول قاعده سیمسون مرکب است .

۵-۳-۲ مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ با قاعده سیمسون به ازای $h = \frac{\pi}{4}$ و تقریبی دیگری به ازای $h = \frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید.

حل:

$$S(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\pi}{4}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\pi}{12}(0 + 2\sqrt{2} + 1) = \frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{12} = 1/00228$$

به ازای $h = \frac{\pi}{8}$ داریم

$$S(\frac{\pi}{8}) = \frac{\frac{\pi}{8}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\pi}{24}(0 + 1/53073 + 1/41421 + 3/69552 + 1)$$

$$= \frac{\pi \times 7/64046}{24} = 1/00013$$

ملاحظه می شود که چون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$S(\frac{\pi}{4})$ و بخصوص $S(\frac{\pi}{8})$ نسبتا دقیق هستند . جالب این که در $S(\frac{\pi}{8})$ ، با توجه به اینکه $\sin 0$ و $\sin\frac{\pi}{2}$ را می دانیم ، نیاز به محاسبه سه تابع $\sin x$ داریم.

ضمنا ، $S(\frac{\pi}{4})$ خیلی دقیقتر از $T(\frac{\pi}{8})$ است که در مثال (۵-۲-۴) به دست آوردیم.

۵-۳-۳ مثال :

تقریبی از $\int_0^1 x^3 dx$ را به ازای قاعده سیمسون محاسبه کنید.

حل:

بزرگترین مقداری که برای h می توان اختیار کرد $h=\frac{1}{2}$ است (زیرا ، تعداد زیر فاصله ها باید زوج باشد). بنابراین ، داریم

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(0+4\times\frac{1}{8}+1\right)=\frac{1}{4}$$

اما

$$\int_0^1 x^3 dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

یعنی،

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

البته این اتفاقی نیست و در ادامه ثابت خواهیم کرد که قاعده سیمسون برای چند جمله ای های تا درجه سه دقیق است .

۵-۳-۴ خطای S(h)

برای تعیین خطای S(h) ابتدا خطای (*) را حساب می کنیم . برای این منظور ، و سادگی عملیات ، تفاضل زیر را محاسبه می کنیم .

$$E_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right)$$

که برابر $-\frac{h^5}{90} f_i^{(4)}$ است .

و با توجه به علامات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f^{(4)}(x)$ بر بازه $[a , b]$

داریم:

$$ES(h) \cong -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \qquad (۱)$$

این رابطه نشان می دهد که خطای S(h) متناسب با h^4 است و این خطـــا برای چند جمله ای های تا درجه سوم صفر است (زیرا ، مشتق چهارم یک چند جمله ای که درجه آن نابیشتر از ۳ باشد صفر است). به عبارت دیگر روش سیمسون برای چند جمله ایهای تا درجه ۳ دقیق است . با توجه به اینکه نقطه مشخصی نیست در عمل فرض η می کنند

$$\max_{x_0 \le x \le x_n} \left| f^{(4)}(x) \right| \le M_4$$

که از آن نتیجه می شود

$$\left| ES(h) \right| \le \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$$

با استفاده از را بطه بالا می توان S(h) را با دقتی که از قبل تعیین می شود محاسبه کرد .

یعنی ، اگر بخواهیم S(h) را چنان پیدا کنیم که

$$|ES(h)| < \varepsilon$$

که در آنگاه ε عدد کوچک معلومی است ، کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{180}h^4M_4 \le \varepsilon$$

البته با داشتن تابع f مشکلی در محاسبه M_4 نیست.

۵-۳-۵ مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ به روش سیمسون محاسبه کنید که خطای آن کمتر از 10^{-5} باشد .

حل:

با توجه به اینکه $f(x)=x\cos x$ داریم:

$$f'(x)=\cos x-x\sin x \qquad , \qquad f''(x)=-2\sin x-x\cos x$$

$$f'''(x)=-3\cos x+x\sin x \qquad , \qquad f^{(4)}(x)=4\sin x+x\cos x$$

بنابراین با توجه به این که $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, M_4 به دست می آوریم:

$$\left|f^{(4)}(x)\right|=\left|4\sin x+x\cos x\right|\le 4\left|\sin x\right|+\left|x\right|\left|\cos x\right|\le 4+\frac{\pi}{2}<6$$

پس، $M_4=6$ و قرار می دهیم.

$$\frac{(b-a)}{180}h^4M_4=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{180}h^4\times 6=\frac{\pi h^4}{60}\leq 10^{-5}$$

که ازآن نتیجه می شود

$$h\leq 0/1\times\sqrt{\frac{6}{\pi}}\cong 0/1176$$

چون $nh=b-a=\frac{\pi}{2}$، پس

$$n=\frac{\pi}{2h}\geq 13/357$$

چون در روش سیمسون n باید زوج باشد قرار می دهیم n=14 که در نتیجه h مربوط به آن ، که حتما از 0/1176 کمتر است ، چنین به دست می آید .

$$h=\frac{\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{\pi}{28}\cong 0/1122$$

به این ترتیب باید S(h) را به ازای h=0/1122 حساب کنیم.